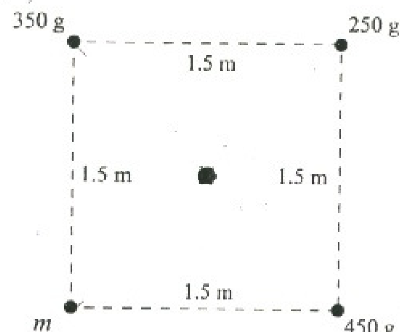
DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE 2006. - 1. Grupa
Vis, 11.-14. svibnja 2006.

Zadatak 1 (18 bodova)

U vrhovima kvadrata stranice 1.5 m pričvršćena su tri tijela mase 250 g, 350 g, 450 g i jedno tijelo nepoznate mase *m* (vidi sliku). U sredini kvadrata nalazi se još jedno tijelo koje u jednom trenutku pustimo gibati iz stanja mirovanja. Odredite (barem jednu) vrijednost mase *m* koja će za početnu akceleraciju tijela u sredini kvadrata, uslijed gravitacijskog privlačenja, dati vrijednost od 10^{-11} m/s^2. Skicirajte smjer ukupne sile na tijelo u sredini kvadrata (s točnošću od 45°). $G = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{m^3/kg\,s^2}$.



Zadatak 2 (17 bodova)

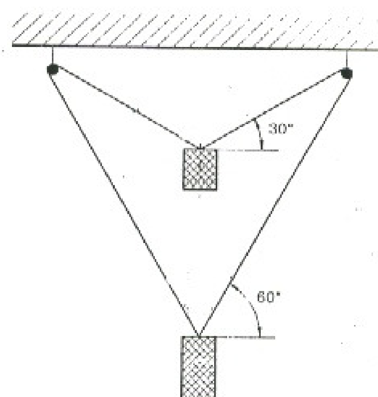
S vrha kosine, koja s horizontalom zatvara kut 30°, pusti se gibati tijelo zanemarivih dimenzija. Nakon što dođe do dna kosine, tijelo se nastavlja gibati po vodoravnoj podlozi. I kosina i vodoravna podloga su načinjeni od istog materijala, pa je i koeficijent trenja na njima isti. Izračunajte taj koeficijent trenja, ako je put koji je tijelo prešlo po vodoravnom dijelu podloge jednak duljini kosine.

Zadatak 3 (17 bodova)

S vrha nebodera koji ima 22 kata bacimo tijelo da slobodno pada. Nakon dvije sekunde tijelo se nalazi na visini koja odgovara podu osamnaestog kata, a sekundu kasnije na visini koja odgovara podu desetog kata. Odredite komponentu brzine kojom je tijelo bačeno i visinu nebodera u metrima. Da li je tijelo bačeno prema gore ili prema dolje? ($g = 10$ m/s^2. Zanemarite trenje. Pretpostavite da je pod početnog kata nebodera u ravnini sa tlom, te da je debljina poda zanemariva.)

Zadatak 4 (18 bodova)

Sistem od dva utega, dvije koloture zanemarivih dimenzija i dvije nerastezljive niti (vidi sliku) nalazi se u ravnoteži, u Zemljinom gravitacionom polju. Nađite omjer masa utega.



Rezultati zadataka 1. grupe (2006.)
(državno natjecanje)

Zadatak 1 (18 bodova)

Ukupnu silu je najjednostavnije naći tako da se prvo zbroje (tj. oduzmu) doprinosi uzduž dijagonala.
Ukupna iznos sile F_- na tijelo u sredini koja dolazi od tijela mase $m_1 = 450$g i mase $m_2 = 350$g:

$$F_- = G\frac{Mm_1}{\left(b\sqrt{2}/2\right)^2} - G\frac{Mm_2}{\left(b\sqrt{2}/2\right)^2} = \frac{2GM}{b^2}(m_1 - m_2) \qquad (2)$$

Sila je usmjerena pod kutem od −45°.
Ukupni iznos sile F_+ na tijelo u sredini koja dolazi od tijela mase $m_3 = 250$g i mase m:

$$F_+ = \left| G\frac{Mm_3}{\left(b\sqrt{2}/2\right)^2} - G\frac{Mm}{\left(b\sqrt{2}/2\right)^2} \right| = \frac{2GM}{b^2}|m_3 - m| \qquad (2)$$

Smjer sile F_+ je, ovisno o relativnom odnosu masa m_3 i m, pod kutem od 45° ili 135°.
Ukupni iznos sile na tijelo u sredini kvadrata, zbog toga što su F_+ i F_- pod pravim kutem, jest:

$$F = \sqrt{F_+^2 + F_-^2} = \frac{2GM}{b^2}\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (m_3 - m)^2} \qquad (4)$$

Akceleracija tijela u sredini kvadrata jednaka je:

$$Ma = F \qquad \Rightarrow \qquad Ma = \frac{2GM}{b^2}\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (m_3 - m)^2} \qquad (2)$$

Odatle slijedi:

$$a = \frac{2G}{b^2}\sqrt{(m_1 - m_2)^2 + (m_3 - m)^2} \qquad \Rightarrow \qquad (m_3 - m)^2 = \left(\frac{ab^2}{2G}\right)^2 - (m_1 - m_2)^2 \qquad (3)$$

Uvrštavanjem:

$$(m - m_3)^2 = 0.01845 \qquad \Rightarrow \qquad m - m_3 = \pm 0.136\,\text{kg} = \pm 136\text{ g} \qquad (2)$$

Dakle, moguća su dva rješenja:

I rješenje: $m = m_3 + 136 = 386$ g (smjer sile između 225° i 270°) (3)

II rješenje: $m = m_3 - 136 = 114$ g (smjer sile između 0° i 45°)

Zadatak 2 (17 bodova)

Zakon očuvanja energije za gibanje po kosini daje:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + F_{tr}l \qquad (2)$$

gdje je h visina vrha kosine, a l njena duljina. Tu smo uzeli u obzir da tijelo savladava konstantnu silu trenja na putu l.
Sila trenja jednaka je:

$$F_{tr} = \mu T \qquad (2)$$

(T – pritisak tijela na podlogu/kosinu). Na kosini, sila T je jednaka:

$$T = mg \times \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (4)$$

Iz gornjih izraza možemo napisati kolika je kinetička energija tijela u podnožju kosine:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu mgl \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}mv^2 = mgh - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu mgl \qquad (2)$$

Za gibanje po ravnoj podlozi vrijedi također zakon očuvanja energije:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \mu mgl \qquad (2)$$

Uvrštavanjem u gornji izraz dobivamo:

$$\mu mgl = mgh - \frac{\sqrt{3}}{2}\mu mgl \qquad \Rightarrow \qquad \mu l\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = h \qquad (2)$$

Uvažavajući činjenicu da je

$$h = \frac{1}{2}l \qquad (1)$$

dobivamo izraz za koeficijent trenja:

$$\mu = \frac{1/2}{1+\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 0.2679 \qquad (2)$$

Zadatak 3 (17 bodova)

Ako ishodište postavimo na vrh nebodera, tada za gibanje u okomitom smjeru vrijedi:

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

(v_0 – početna brzina u okokmitom smjeru; pozitivan smjer y osi je suprotan ubrzanju sile teže.)
Gibanje u vodoravnom smjeru, ako i postoji, ovdje nije važno. (1)
Udaljenost od vrha nebodera do 18., tj. 10. kata jednaka je:

$$H_{18} = 5h \qquad (1)$$

$$H_{10} = 13h \qquad (1)$$

(h – visina jednog kata). Uvrštavanje u prvi izraz daje dvije jednadžbe:

$$-5h = v_0 t_0 - \frac{1}{2}gt_0^2 \qquad (1)$$

$$-13h = v_0(t_0 + \Delta t) - \frac{1}{2}g(t_0 + \Delta t)^2 \qquad (1)$$

Uvrštavanjem vrijednosti $t_0 = 2$ s, $\Delta t = 1$ s i $g = 10$ m/s^2, dobivamo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$-5h = 2v_0 - 20$$

$$-13h = 3v_0 - 45$$

Rješavanjem sustava dobivamo:

$$v_0 = \frac{35}{11} = 3.182\,\text{m/s} \qquad (3)$$

$$h = \frac{30}{11} = 2.727\,\text{m} \qquad (3)$$

Prema tome, visina nebodera je

$$H = 22h = 60\,\text{m}. \qquad (3)$$

Tijelo je bačeno s vrha nebodera prema gore (zbog $v_0 > 0$). (1)

Zadatak 4 (18 bodova)

Rastavimo napetost u niti na gornjem utegu, u vodoravnu i okomitu komponentu:

$$F_1^2 = F_{1x}^2 + F_{1y}^2, \qquad (1)$$

$$F_{1y} = \frac{1}{2} m_1 g \,, \qquad (2)$$

$$\frac{F_{1y}}{F_{1x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Slično vrijedi i za napetost niti na donjem utegu:

$$F_2^2 = F_{2x}^2 + F_{2y}^2 \,, \qquad (1)$$

$$F_{2y} = \frac{1}{2} m_2 g \,, \qquad (2)$$

$$\frac{F_{2y}}{F_{2x}} = \sqrt{3} \qquad (2)$$

Kako se sistem nalazi u ravnoteži, sile F_1 i F_2 moraju biti jednake. Odatle slijedi:

$$F_{1x}^2 + F_{1y}^2 = F_{2x}^2 + F_{2y}^2 \qquad (2)$$

Uvrštavanjem gornjih izraza dobiva se:

$$\left(\sqrt{3} F_{1y}\right)^2 + F_{1y}^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} F_{2y}\right)^2 + F_{2y}^2 \qquad \Rightarrow \qquad 4F_{1y}^2 = \frac{4}{3} F_{2y}^2 \qquad (4)$$

Slijedi traženi omjer masa:

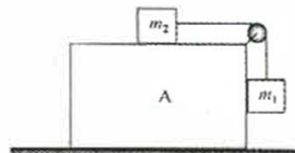
$$\frac{F_{2y}}{F_{1y}} = \sqrt{3} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m_2}{m_1} = \sqrt{3} \qquad (2)$$

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Primošten, 10.-13. svibnja 2007.

Srednje škole – 1. grupa

1. zadatak (16 bodova)

Dva tijela mase m_1 i m_2 spojena su pomoću nerastezljivog užeta zanemarive mase preko koloture zanemarive mase. Kojim se minimalnim ubrzanjem treba gibati tijelo A u horizontalnom smjeru tako da tijela mase m_1 i m_2 miruju u odnosu na tijelo A? Mase tijela se odnose kao $m_1 : m_2 = 1 : 2$. Koeficijent trenja između tijela mase m_1 i tijela A te tijela mase m_2 i tijela A iznosi $\mu = 0.15$.



2. zadatak (18 bodova)

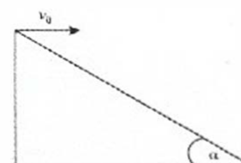
Projektil mase 12 kg ispaljen je početnom brzinom 150 m/s pod kutem 60° u odnosu na horitontalu. U trenutku kada je došao na najvišu točku putanje, projektil je eksplodirao i razdvojio se na dva dijela pri čemu je masa jednog dijela tri puta veća od mase drugog dijela. Oba dijela padnu na zemlju u istom trenutku. Dio veće mase padne na isto mjesto sa kojeg je ispaljen projektil.

a) Na koju udaljenost od mjesta sa kojeg je ispaljen projektil će pasti dio manje mase?
b) Koliko se energije oslobodilo prilikom eksplozije?

Otpor zraka je zanemariv.

3. zadatak (20 bodova)

Sa vrha kosine nagiba $\alpha = 30°$ bačeno je malo tijelo početnom brzinom v_0 u horizontalnom smjeru. Tijelo padne na kosinu na udaljenosti s_1 od točke iz koje je izbačeno te se odbije od kosine. Tijelo sljedeći put padne na kosinu na udaljenosti s_2 od točke na koju je prvi puta palo na kosinu. Nadite omjer duljina s_1/s_2. Pretpostavite da su sudari sa kosinom savršeno elastični te da je otpor zraka zanemariv.



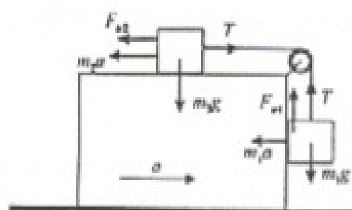
4. zadatak (16 bodova)

Gravitacijska sila Mjeseca utječe na ubrzanje tijela koja slobodno padaju u blizini površine Zemlje. Nađite omjer razlike ubrzanja tijela blizu površine Zemlje između točke na Zemljinoj površini koja je najudaljenija od Mjeseca i točke na Zemljinoj površini koja je najbliža Mjesecu te gravitacijskog ubrzanja Zemlje. Zadane su sljedeće veličine: masa Zemlje je $5.98 \cdot 10^{24}$ kg, masa Mjeseca je $7.36 \cdot 10^{22}$ kg, radijus Zemlje je $6.37 \cdot 10^{6}$ m, udaljenost Mjeseca od Zemlje je $3.84 \cdot 10^{8}$ m.

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Primošten, 10.-13. svibnja 2007.

Srednje škole – 1. grupa – rješenja

1. zadatak (16 bodova)



S obzirom da tijela 1 i 2 miruju u odnosu na tijelo A, prema drugom Newtonovom zakonu vrijedi:

$$m_1 g = T + F_{tr1}$$
$$m_2 a + F_{tr2} = T \qquad (4)$$

Sila trenja na tijela 1 i 2 je jednaka:

$$F_{tr1} = \mu m_1 a$$
$$F_{tr2} = \mu m_2 g \qquad (4)$$

Uvrštavanjem u prve dvije jednadžbe:

$$m_1 g = T + \mu m_1 a$$
$$m_2 a + \mu m_2 g = T$$

Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobije se:

$$m_1 g - m_2 a - \mu m_2 g = \mu m_1 a$$
$$(\mu m_1 + m_2) a = (m_1 - \mu m_2) g$$
$$a = \frac{m_1 - \mu m_2}{\mu m_1 + m_2} g \qquad (6)$$

Uvrštavanjem $m_1 : m_2 = 1 : 2$, odnosno $m_2 = 2m_1$ dobije se:

$$a = \frac{1 - 2\mu}{\mu + 2} g$$
$$a = 3.19 \text{ m/s}^2 \qquad (2)$$

2. zadatak (18 bodova)

Mase prvog i drugog dijela su jednake:

$$\left.\begin{array}{r} m_1 + m_2 = 12 \text{ kg} \\ m_1 = 3m_2 \end{array}\right\} \Rightarrow m_1 = 9 \text{ kg}, m_2 = 3 \text{ kg} \qquad (1)$$

Komponente brzine projektila neposredno nakon ispaljivanja su jednake:

$$v_{0x} = \frac{1}{2} v_0 = 75 \text{ m/s}$$
$$v_{0y} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 = 129.9 \text{ m/s} \qquad (2)$$

Vrijeme potrebno da projektil dođe na najvišu točku putanje iznosi:

$$v = v_{0y} - gt$$

$$0 = v_{0y} - gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{\sqrt{3}v_0}{2g} = 13.24\ \text{s} \qquad (3)$$

Horizontalna udaljenost koju prijeđe projektil je jednaka:

$$x = v_{0x}t$$

$$d_1 = \frac{\sqrt{3}v_0^2}{4g} = 993\ \text{m} \qquad (3)$$

Oba dijela će pasti u istom trenutku na zemlju što znači da su im brzine nakon eksplozije u horizontalnom smjeru. S obzirom da će dio veće mase pasti na isto mjesto iz kojeg je ispaljen projektil, njegova brzina nakon eksplozije bit će jednakog iznosa i suprotnog smjera brzini projektila prije eksplozije. Brzinu drugog komada nakon eksplozije izračunamo iz zakona očuvanja količine gibanja:

$$mv_{0x} = -m_1v_{0x} + m_2v_2$$

$$v_2 = \frac{(m+m_1)v_{0x}}{m_2} = \frac{7}{2}v_0 = 525\ \text{m/s} \qquad (3)$$

Udaljenost od mjesta sa kojeg je ispaljen projektil na koju padne komad manje mase je jednaka:

$$d_2 = d_1 + v_2t = \frac{2\sqrt{3}v_0^2}{g} = 7945\ \text{m} \qquad (3)$$

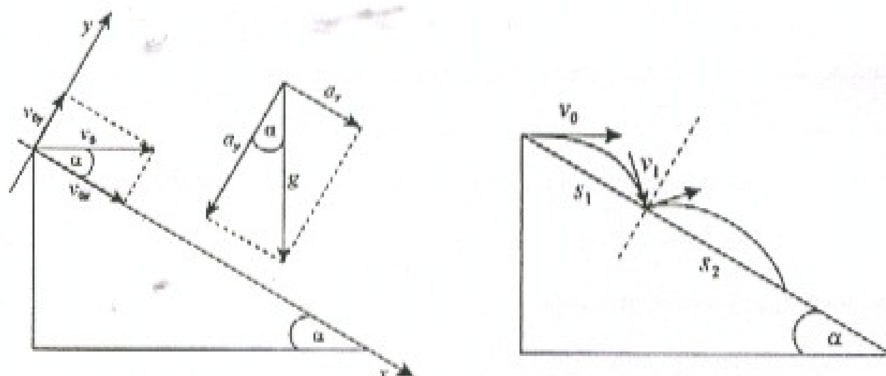
Energiju oslobođenu prilikom eksplozije izračunamo iz zakona očuvanja energije:

$$\Delta E = E_{poslije} - E_{prije}$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{1}{2}mv_{0x}^2$$

$$\Delta E = \frac{3}{2}mv_0^2 = 405\ \text{kJ} \qquad (3)$$

3. zadatak (20 bodova)



Postavimo koordinatni sustav tako da je x os paralelna kosini, a y os okomita na kosinu. Rastavimo početnu brzinu i gravitacijsko ubrzanje na x i y komponentu.

$$v_{0x} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 \qquad v_{0y} = \frac{1}{2}v_0 \qquad (1)$$

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Primošten, 10.-13. svibnja 2007.

$$a_x = \frac{1}{2} g \qquad a_y = -\frac{\sqrt{3}}{2} g \qquad (1)$$

Jednadžbe gibanja kuglice u x i y smjeru glase:

$$x(t) = v_{0x} t + \frac{a_x}{2} t^2 \qquad y(t) = v_{0y} t + \frac{a_y}{2} t^2 \qquad (2)$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \qquad v_y(t) = v_{0y} + a_y t \qquad (2)$$

Ili nakon uvrštavanja:

$$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 t + \frac{1}{4} g t^2 \qquad y(t) = \frac{1}{2} v_0 t - \frac{\sqrt{3}}{4} g t^2$$

$$v_x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 + \frac{1}{2} g t \qquad v_y(t) = \frac{1}{2} v_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} g t$$

Vrijeme t_1 kada kuglica prvi puta padne na kosinu dobijemo iz uvjeta $y(t_1) = 0$:

$$y(t_1) = 0 = \frac{1}{2} v_0 t_1 - \frac{\sqrt{3}}{4} g t_1^2 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{v_0}{g} \qquad (2)$$

Udaljenost s_1 je prema tome jednaka:

$$s_1 = x(t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 t_1 + \frac{1}{4} g t_1^2 = \frac{4}{3} \frac{v_0^2}{g} \qquad (2)$$

Komponente brzine kuglice u trenutku kada prvi put padne na kosinu su jednake:

$$v_{1x} = v_x(t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 + \frac{1}{2} g t_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6} v_0 \qquad v_{1y} = v_y(t_1) = \frac{1}{2} v_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} g t_1 = -\frac{1}{2} v_0 \quad (2)$$

Iz slike se može vidjeti da će komponente početne brzine za gibanje kuglice nakon što prvi put odskoči od kosine iznositi:

$$v_{0x} = v_{1x} \qquad v_{0y} = -v_{1y} \qquad (1)$$

Jednadžbe gibanja za ovo gibanje glase:

$$x(t) = v_{1x} t + \frac{a_x}{2} t^2 \qquad y(t) = v_{1y} t + \frac{a_y}{2} t^2 \qquad (2)$$

Odnosno, nakon uvrštavanja početnih brzina i akceleracija:

$$x(t) = \frac{5\sqrt{3}}{6} v_0 t + \frac{1}{4} g t^2 \qquad y(t) = \frac{1}{2} v_0 t - \frac{\sqrt{3}}{4} g t^2$$

Trenutak t_2 u kojem kuglica drugi put padne na kosinu odredimo iz uvjeta $y(t_2) = 0$

$$y(t_2) = 0 = \frac{1}{2} v_0 t_2 - \frac{\sqrt{3}}{4} g t_2^2 \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{v_0}{g} \qquad (2)$$

Udaljenost s_2 je prema tome jednaka:

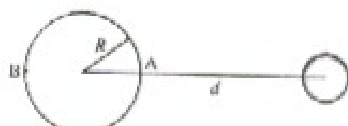
$$s_2 = x(t_2) = \frac{5\sqrt{3}}{6} v_0 t_2 + \frac{1}{4} g t_2^2 = 2 \frac{v_0^2}{g} \qquad (2)$$

Prema tome traženi omjer je:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{\frac{4}{3} \frac{v_0^2}{g}}{2 \frac{v_0^2}{g}} = \frac{2}{3} \qquad (1)$$

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Primošten, 10.-13. svibnja 2007.

4. zadatak (16 bodova)



Ubrzanje tijela na točkama A i B iznosi:

$$g_A = \frac{GM_Z}{R^2} - \frac{GM_M}{(d-R)^2} \qquad (2)$$

$$g_B = \frac{GM_Z}{R^2} + \frac{GM_M}{(d+R)^2} \qquad (2)$$

Razlika ubrzanja je jednaka:

$$\Delta g = g_B - g_A = GM_M\left(\frac{1}{(d+R)^2} + \frac{1}{(d-R)^2}\right)$$

$$\Delta g = 2GM_M \frac{d^2+R^2}{(d^2-R^2)^2} \qquad (4)$$

Gravitacijsko ubrzanje Zemlje iznosi:

$$g = \frac{GM_Z}{R^2} \qquad (2)$$

Traženi omjer je:

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2GM_M \frac{d^2+R^2}{(d^2-R^2)^2}}{\frac{GM_Z}{R^2}}$$

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2M_M}{M_Z}\frac{R^2}{d^2}\frac{\left(1+\frac{R^2}{d^2}\right)}{\left(1-\frac{R^2}{d^2}\right)^2} \qquad (4)$$

$$\frac{\Delta g}{g} = 6.78 \cdot 10^{-6} \qquad (2)$$

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Poreč, 8. - 11. svibnja 2008.

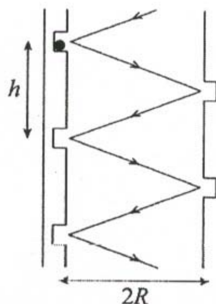
Srednje škole – 1. grupa

Zadatak 1 (18 bodova)

Dva vlaka iz Zagreba i Karlovca istovremeno kreću jedan prema drugome bez početne brzine. Oba vlaka se najprije gibaju jednoliko ubrzano po pravcu dok ne postignu brzinu v_1, odnosno v_2, a nakon toga se gibaju jednoliko po pravcu. Omjer brzina jednolikog gibanja vlakova je $v_1/v_2 = 3/4$. U trenutku mimoilaženja vlakovi imaju iste brzine, a u Karlovac, odnosno Zagreb stižu istovremeno. Koliki je omjer ubrzanja vlakova a_1/a_2 ?

Zadatak 2 (18 bodova)

Niz spiralni žlijeb polumjera $R = 1$ m i koraka h klizi malo tijelo brzinom stalnog iznosa. Koeficijent trenja između tijela i stijenki žlijeba iznosi $\mu = 0.1$. Omjer opsega i koraka žlijeba iznosi $\sqrt{3}$. Izračunajte brzinu kojom se tijelo spušta niz žlijeb.



Zadatak 3 (17 bodova)

Kugla mase $M = 0.2$ kg miruje na stupu visine $h = 5$ m. Metak mase 0.01 kg giba se brzinom $v_0 = 500$ m/s prema kugli te prolazi kroz središte kugle. Kugla padne na tlo na udaljenosti 20 m od stupa.

a) Gdje je metak pao na tlo?

b) Koliki udio početne kinetičke energije metka se pretvorio u toplinu prilikom sudara?

Zanemarite otpor zraka i pretpostavite da je brzina metka prije sudara bila u horizontalnom smjeru.

Zadatak 4 (17 bodova)

Asteroid sferičnog oblika ima gustoću 2 500 kg/m^3.

a) Izračunajte maksimalan polumjer asteroida sa kojeg čovjek, nakon što odskoči sa njegove površine, ne padne natrag na asteroid. Čovjek prilikom odskoka na asteroidu proizvede jednak impuls sile kao prilikom odskoka na Zemlji. Maksimalna visina, koju čovijek može doseći prilikom skoka na Zemlji, iznosi 1m.

b) Koliko iznosi period satelita koji se giba po kružnoj putanji oko ovog asteroida uz njegovu površinu?

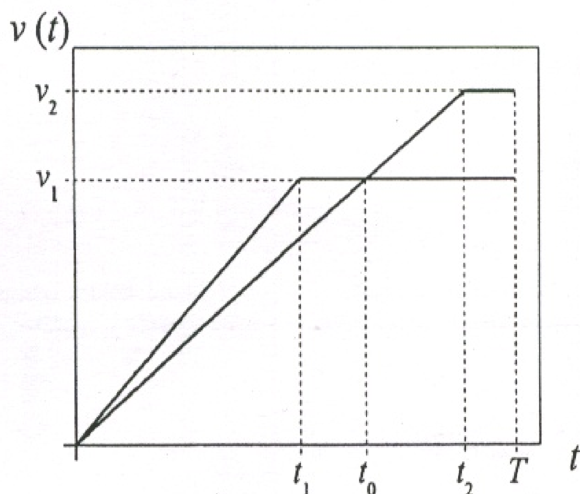
$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

DRŽAVNI SUSRET I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Poreč, 08. – 11. svibnja 2008.

Srednje škole – 1. grupa – rješenja

Zadatak 1 (18 bodova)

Prikažimo gibanje vlakova na *v-t* dijagamu.



(3)

Brzine kojima se vlakovi gibaju jednoliko po pravcu jednake su:

$v_1 = a_1 t_1$

$v_2 = a_2 t_2$ (2)

Iz čega slijedi da je omjer ubrzanja jednak:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{v_1}{v_2}\frac{t_2}{t_1} = \frac{3}{4}\frac{t_2}{t_1}$ (1)

Ukupan put koji prijeđu vlakovi jednak je:

$s = \frac{1}{2}v_1 t_1 + v_1\left(T - t_1\right) = v_1 T - \frac{1}{2}v_1 t_1$

$s = \frac{1}{2}v_2 t_2 + v_2\left(T - t_2\right) = v_2 T - \frac{1}{2}v_2 t_2$ (2)

Put koji su prešli vlakovi do trenutka mimoilaženja jednak je:

$s_1 = \frac{1}{2}v_1 t_1 + v_1\left(t_0 - t_1\right)$

$s_2 = \frac{1}{2}v_1 t_0$ (2)

Zbroj ova dva puta jednak je ukupnoj udaljenosti koju prijeđu vlakovi.

$s = s_1 + s_2 = \frac{3}{2}v_1 t_0 - \frac{1}{2}v_1 t_1$ (1)

Ubrzanje drugog vlaka jednako je:

$$a_2 = \frac{v_2}{t_2} = \frac{v_1}{t_0} \qquad (1)$$

Iz čega slijedi da je vrijeme mimoilaženja:

$$t_0 = \frac{v_1}{v_2} t_2 = \frac{3}{4} t_2 \qquad (1)$$

Pa je udaljenost između gradova jednaka:

$$s = \frac{9}{8} v_1 t_2 - \frac{1}{2} v_1 t_1 \qquad (1)$$

Ukupno vrijeme putovanja je:

$$T = \frac{s}{v_1} + \frac{1}{2} t_1 = \frac{9}{8} t_2 - \frac{1}{2} t_1 + \frac{1}{2} t_1 = \frac{9}{8} t_2$$

$$T = \frac{s}{v_2} + \frac{1}{2} t_2 = \frac{9}{8} \frac{v_1}{v_2} t_2 - \frac{1}{2} \frac{v_1}{v_2} t_1 + \frac{1}{2} t_2 = \frac{43}{32} t_2 - \frac{3}{8} t_1 \qquad (2)$$

Iz čega slijedi:

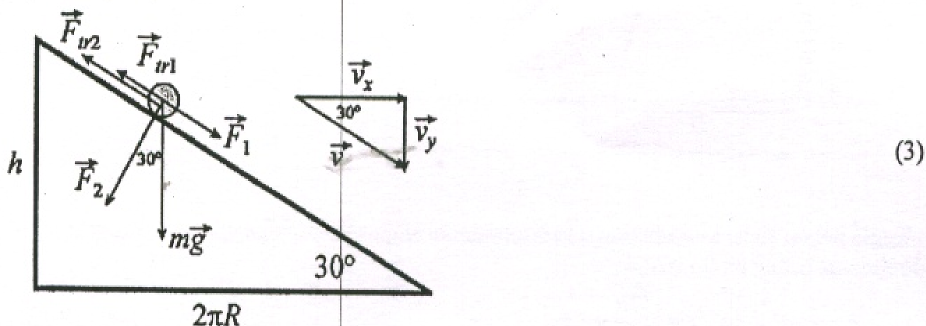
$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{12}{7} \qquad (1)$$

Omjer ubrzanja je:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{7} \qquad (1)$$

Zadatak 2 (18 bodova)

Tijelo se giba po kosini:



(3)

S obzirom da je omjer kateta pravokutnog trokuta jednak $2\pi R/h = \sqrt{3}$, kut između hipotenuze i duže katete je 30°.
Težinu tijela rastavimo na komponentu niz kosinu F_1 i okomito na kosinu F_2:

$$F_1 = \frac{1}{2} mg$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} mg \qquad (2)$$

Sila trenja na tijelo zbog dodira sa donjom podlogom je:

$$F_{tr1} = \mu F_2 = \mu mg \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (3)$$

Sila trenja zbog dodira sa okomitom stijenkom žlijeba je:

$$F_{tr2} = \mu \frac{mv_x^2}{R} \tag{3}$$

Horizontalna komponenta brzine kuglice v_x jednaka je:

$$v_x = \frac{\sqrt{3}}{2} v \tag{1}$$

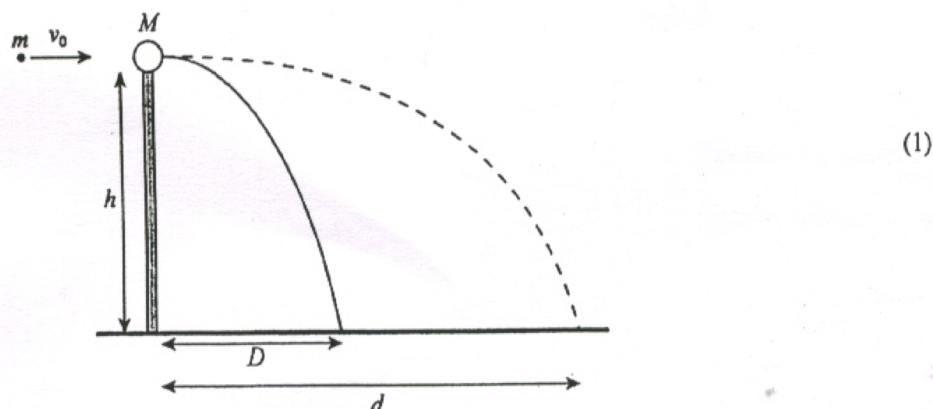
Tijelo se spušta brzinom stalnog iznosa pa je zbroj svih sila koje djeluju na tijelo niz kosinu jednak nuli:

$$F_1 - F_{tr1} - F_{tr2} = 0$$

$$\frac{1}{2} mg = \mu mg \frac{\sqrt{3}}{2} + \mu \frac{3mv^2}{4R} \tag{4}$$

$$v = \sqrt{\frac{2Rg}{3\mu}\left(1 - \mu\sqrt{3}\right)} = 7.35 \text{ m/s} \tag{2}$$

Zadatak 3 (17 bodova)



(1)

a) Kugla nakon sudara ima brzinu u horizontalnom smjeru te pada sa visine h. Vrijeme potrebno da padne na tlo iznosi:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1 \text{ s} \tag{2}$$

Za to vrijeme u horizontalnom smjeru prijeđe udaljenost D iz čega se može izračunati brzina kugle nakon sudara:

$$D = Vt \quad \Rightarrow \quad V = \frac{D}{t} = 20 \text{ m/s} \tag{2}$$

Zakon očuvanja količine gibanja za sudar metka i kugle glasi:

$$mv_0 = mv + MV \tag{2}$$

Iz zakona očuvanja količine gibanja slijedi da je brzina metka nakon sudara jednaka:

$$v = v_0 - \frac{MV}{m} = 100 \text{ m/s} \tag{2}$$

Brzina metka nakon sudara je također u horizontalnom smjeru te će mu trebati jednako vrijeme t kao kugli da padne na tlo, a udaljenost od stupa na koju će pasti jednaka je:

$$d = vt = 100 \text{ m} \tag{2}$$

b) Zakon očuvanja energije:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} + Q \qquad (2)$$

Slijedi da se prilikom sudara u toplinu pretvori

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}\right) = 1160 \text{ J} \qquad (2)$$

Odnosno

$$p = \frac{Q}{\frac{mv_0^2}{2}} = 0.928 = 92.8\% \qquad (2)$$

Početne kinetičke energije metka.

Zadatak 4 (17 bodova)

Brzina kojom čovjek odskoči sa površine asteroida jednaka je brzini kojom odskoči sa površine Zemlje. Za skok čovjeka vertikalno u vis na Zemlji vrijede sljedeće jednadžbe:

$$0 = v_0 - gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g}$$

$$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_0^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh} \qquad (3)$$

Ukupna energija čovjeka nakon odskoka sa površine asteroida mora biti jednaka nuli da ne padne natrag na asteroid.

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{GmM}{R} = 0 \qquad (3)$$

Masu asteroida izrazimo pomoću gustoće:

$$M = \rho\frac{4\pi}{3}R^3 \qquad (1)$$

Uvrštavanjem izraza za masu i brzinu v_0 dobije se:

$$gh = G\rho\frac{4\pi}{3}R^2$$

$$R = \sqrt{\frac{3gh}{4\pi G\rho}} = 3.75 \text{ km} \qquad (3)$$

b) Gravitacijska sila asteroida na tijelo koje kruži blizu njegove površine jednaka je centripetalnoj sili.

$$\frac{GmM}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \qquad (3)$$

Brzina kruženja satelita oko asteroida iznosi:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \qquad (1)$$

Uvrštavanjem se dobije:

$$\frac{G}{R}\rho\frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2}$$

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}} = 7517 \text{ s} = 2.09 \text{ h} \qquad (3)$$

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Vukovar, 3. - 6. svibnja 2009.

Srednje škole – 1. skupina

1. zadatak (18 bodova)

Prednje vjetrobransko staklo automobila zatvara sa horizontalom kut od 30°. Kuglice tuče padaju okomito prema zemlji, a njihova brzina obzirom na promatrača, koji stoji pored ceste, u trenutku udara u staklo automobila iznosi 5 m/s. Izračunajte brzinu kojom se treba gibati automobil da vozač u njemu vidi da se kuglice tuče odbijaju od stakla okomito u zrak. Koliko iznosi brzina kuglica tuče nakon odbijanja u odnosu na promatrača koji stoji pored ceste? Koliku će maksimalnu visinu doseći kuglice tuče nakon odbijanja? Zanemarite otpor zraka.

2. zadatak (17 bodova)

Automobil vozi stalnom brzinom v cestom, koja je nagnuta za 30° u odnosu na horizontalu te ulazi u zavoj polumjera R = 100 m. Izračunajte najveću i najmanju brzinu kojom automobil može voziti u zavoju, a da ostane na istoj visini. Koeficijent trenja između automobila i ceste iznosi $\mu = 0.1$.

3. zadatak (19 bodova)

Kvadar mase M giba se brzinom V_0 = 0.5 m/s po horizontalnoj podlozi. Nasuprot kvadra nalazi se stroj koji ispucava loptice mase m prema kvadru. Stroj ispuca jednu lopticu svake 2 s. Sudari loptica sa kvadrom su plastični tj. nakon sudara loptica i kvadar se gibaju zajedno, a u trenutku sudara brzina loptice je u horizontalnom smjeru i iznosi v_0. Masa kvadra jednaka je $M = 1000m$, a brzina loptica je $v_0 = 40V_0$. Izračunajte koliko je sudara potrebno da se kvadar zaustavi i put koji će kvadar prijeći prije zaustavljanja. Trenje između kvadra i podloge je zanemarivo.

Uputa: zbroj prvih n prirodnih brojeva jednak je $1+2+3+\cdots+n-1+n=\frac{n(n+1)}{2}$

4. zadatak (16 bodova)

Udaljenost između Zemlje i Mjeseca približno je jednaka $R = 60R_Z$, a polumjer Zemlje jednak je R_Z = 6 370 km. Masa Zemlje iznosi $5.97 \cdot 10^{24}$ kg, a masa Mjeseca je približno 81 puta manja od mase Zemlje. Na kojem položaju između Zemlje i Mjeseca je sila na svemirski brod mase m jednaka nuli? Izračunajte najmanju brzinu kojom se može lansirati svemirski brod sa površine Zemlje da dođe na površinu Mjeseca?

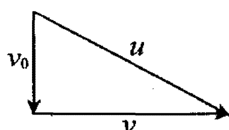
$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Nm²/kg²

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Vukovar, 3. - 6. svibnja 2009.

Srednje škole – 1. skupina

Rješenja i smjernice za bodovanje

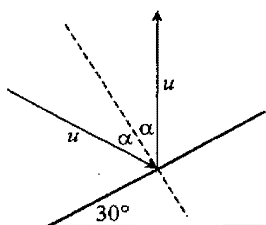
1. zadatak (18 bodova)



Vektor brzine kuglice tuče u trenutku udara u staklo u sustavu automobila prikazan je na slici, a iznos brzine je jednak:

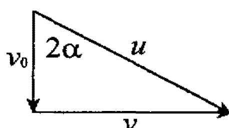
$$u = \sqrt{v_0^2 + v^2}$$

(4)



U sustavu automobila kuglica tuče odbija se pod istim kutem pod kojim i upada. Brzina nakon sudara jednakog je iznosa kao prije sudara, a smjer brzine nakon sudara je okomito prema gore. Sa slike se može vidjeti da je kut $\alpha = 30°$.

(4)



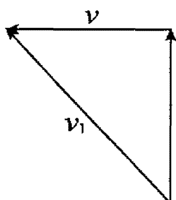
Također slijedi da je kut između brzine u sustavu automobila i brzine u sustavu promatrača prije sudara jednak $2\alpha = 60°$. (2)

Prema tome, brzina automobila i brzina kuglice tuče u sustavu automobila iznose:

$$v = \sqrt{3}v_0 = 8.66 \text{ m/s}$$

$$u = 2v_0 = 10 \text{ m/s}$$

(4)



Brzina kuglice tuče nakon odbijanja u sustavu promatrača jednaka je:

$$v_1 = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{4v_0^2 + 3v_0^2} = \sqrt{7}v_0 = 13.23 \text{ m/s}$$ (2)

Maksimalna visina na koji će doći kuglica tuče iznosi:

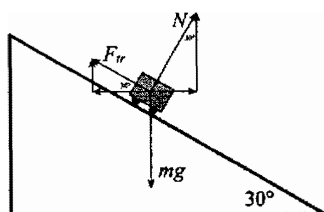
$$h = \frac{u^2}{2g} = 5.1 \text{ m}$$ (2)

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Vukovar, 3. - 6. svibnja 2009.

2. zadatak (17 bodova)

Ako automobil klizi niz kosinu, na njega djeluju sile prikazane na slici.



Budući da se automobil giba po kružnici, ukupna sila u horizontalnom smjeru jednaka je centripetalnoj sili:

$$m\frac{v^2}{R}=\frac{1}{2}N-\frac{\sqrt{3}}{2}F_{tr} \qquad (2)$$

Iz uvjeta zadatka u okomitom smjeru nema gibanja pa je ukupna sila jednaka nuli:

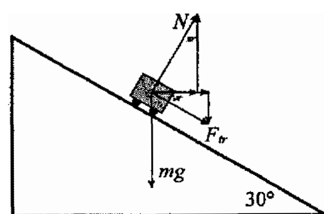
$$\frac{\sqrt{3}}{2}N+\frac{1}{2}F_{tr}-mg=0 \qquad (2)$$

Uvrštavanjem $F_{tr}=\mu N$ dobije se:

$$N=\frac{2mg}{\sqrt{3}+\mu}$$

$$v_{min}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{3}\mu}{\sqrt{3}+\mu}Rg}=21.0\ \text{m/s} \qquad (5)$$

Ako automobil klizi uz kosinu, na njega djeluju sile prikazane na sljedećoj slici.



Na sličan način kao u prvom slučaju dobije se sustav jednadžbi:

$$m\frac{v^2}{R}=\frac{1}{2}N+\frac{\sqrt{3}}{2}F_{tr} \qquad (2)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}N-\frac{1}{2}F_{tr}-mg=0 \qquad (2)$$

Rješavanjem se dobije:

$$N=\frac{2mg}{\sqrt{3}-\mu}$$

$$v_{max}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{3}\mu}{\sqrt{3}-\mu}Rg}=26.6\ \text{m/s} \qquad (4)$$

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

Vukovar, 3. - 6. svibnja 2009.

3. zadatak (18 bodova)

Primjenjujemo zakon očuvanja količine gibanja za uzastopne sudare kvadra s lopticom. Nakon n-tog sudara kvadar sa lopticama se zaustavlja.

1. sudar: $MV_0 - mv_0 = (M+m)V_1$

2. sudar: $(M+m)V_1 - mv_0 = (M+m+m)V_2$

3. sudar: $(M+m+m)V_2 - mv_0 = (M+m+m+m)V_3$

$\vdots$

(n-1) sudar: $(M+(n-2)m)V_{n-2} - mv_0 = (M+(n-1)m)V_{n-1}$

n-ti sudar: $(M+(n-1)m)V_{n-1} - mv_0 = 0$

Zbrajanjem ovih n jednadžbi dobije se:

$$MV_0 - n \cdot mv_0 = 0$$

Slijedi:

$$n = \frac{M}{m}\frac{V_0}{v_0} = 25 \qquad (8)$$

Da bi riješili drugi dio zadatka, trebamo odrediti brzine kvadra (s lopticama) nakon sudara. Iz prve jednadžbe slijedi:

$$V_1 = \frac{MV_0 - mv_0}{M+m} = \frac{1000V_0 - v_0}{1001}$$

Iz druge jednadžbe slijedi:

$$V_2 = \frac{(M+m)V_1 - mv_0}{M+2m} = \frac{MV_0 - 2mv_0}{M+2m} = \frac{1000V_0 - 2v_0}{1002}$$

Općenito:

$$V_k = \frac{MV_0 - k \cdot mv_0}{M + k \cdot m} = \frac{1000V_0 - kv_0}{1000+k} \quad k = 1,2,3,\dots,24 \qquad (4)$$

Neposredno nakon svakog sudara udaljenost između kvadra i sljedeće loptice jednaka je $v_0\tau$. Vrijeme koje prođe do sudara sa sljedećom lopticom jednako je:

$$v_0\tau = (V_k + v_0)t_k \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{v_0}{V_k + v_0}\tau \qquad (2)$$

Za to vrijeme kvadar prijeđe udaljenost:

$$l_k = V_k t_k = \frac{V_k v_0}{V_k + v_0}\tau$$

Uvrštavanjem izraza za V_k:

$$l_k = \frac{v_0(MV_0 - k \cdot mv_0)}{M(V_0 + v_0)}\tau = \frac{8}{205}(25-k) \text{ m} \qquad (3)$$

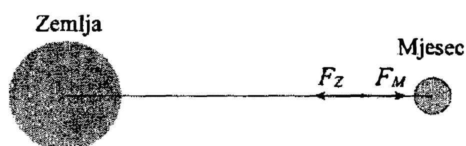
Zbrajanjem svih l_k, $k = 1,2,\dots,24$ dobije se ukupan prijeđeni put:

$$L = l_1 + l_2 + \cdots + l_{24} = \frac{8}{205}(1+2+\cdots+24) = \frac{8}{205}\frac{24 \cdot 25}{2} = 11.7 \text{ m} \qquad (2)$$

DRŽAVNA SMOTRA I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Vukovar, 3. - 6. svibnja 2009.

4. zadatak (16 bodova)

Na udaljenosti *r* od središta Mjeseca gravitacijska sila Zemlje jednakog je iznosa i suprotnog smjera od gravitacijske sile Mjeseca:



$$G\frac{mM_Z}{(R-r)^2}=G\frac{mM_M}{r^2} \qquad (3)$$

Uvrštavanjem se dobije:

$$81r^2=(R-r)^2 \quad \Rightarrow \quad r=\frac{R}{10}=6R_Z=3.82\cdot 10^7 \text{ m} \qquad (4)$$

Brzinu svemirskog broda odredimo pomoću zakona očuvanja energije:

$$\frac{mv^2}{2}+U_{poč}=U_{kon}$$
$$\frac{mv^2}{2}-Gm\left(\frac{M_Z}{R_Z}+\frac{M_M}{R-R_Z}\right)=-Gm\left(\frac{M_Z}{R-r}+\frac{M_M}{r}\right) \qquad (5)$$

Sređivanjem se dobije:

$$v^2=\frac{2GM_Z}{R_Z}\left[1+\frac{1}{81}\frac{1}{59}-\frac{1}{54}-\frac{1}{81}\frac{1}{6}\right] \qquad (4)$$
$$v=11.07 \text{ km/s}$$

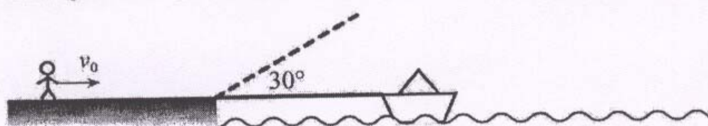
DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE

Varaždin, 2. - 3. svibnja 2010

Srednje škole – 1. skupina

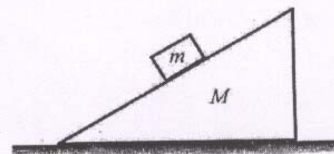
Zadatak 1 (17 bodova)

James Bond trči prema brodu koji miruje uz rub pokretnog mosta. U trenutku kada se James Bond nalazi na početku pokretnog mosta, brod se počinje udaljavati od obale stalnim ubrzanjem. James Bond trči stalnom brzinom $v_0 = 7$ m/s u odnosu na podlogu, a pokretni most duljine $l = 20$ m podiže se stalnom kutnom brzinom $\omega = \sqrt{3}/20$ rad/s. U trenutku kada se James Bond nalazi na kraju pokretnog mosta, pokretni most zatvara sa horizontalom kut 30°. Izračunajte maksimalno ubrzanje broda tako da James Bond skoči na njega! Gravitacijsko ubrzanje iznosi $g = 10$ m/s^2. Otpor zraka je zanemariv.



Zadatak 2 (18 bodova)

Tijelo mase m nalazi se na kosini mase M i nagiba 30°. Trenje između tijela mase m i kosine te između kosine i podloge na kojoj se nalazi je zanemarivo. Odredite iznos i smjer ubrzanja oba tijela u odnosu na promatrača koji miruje na podlozi!



Zadatak 3 (17 bodova)

Lopta mase m slobodno pada sa visine h_0. Nakon što padne na tlo, lopta počinje odskakivati. Prilikom svakog odbijanja od tla lopta izgubi 19% kinetičke energije koje je imala neposredno prije udara u tlo.

a) Koliko ukupno vrijeme lopta provede u zraku?
b) Koliki ukupan put prijeđe lopta?
c) Koliko iznosi prosječna brzina lopte?

Uputa: zbroj beskonačnog geometrijskog niza jednak je $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ za $x < 1$.

Zadatak 4 (18 bodova)

Projektil mase $m = 3$ kg je ispaljen sa tla početnom brzinom $v_0 = 100$ m/s pod kutem 60° u odnosu na horizontalu. U trenutku kada se nalazi na najvišoj točki putanje, projektil se raspadne na dva dijela jednakih masa. Prilikom raspada oslobodi se 600 J energije. Vremenski razmak između pada prvog i drugog dijela na tlo iznosi $T = 4$ s. Izračunajte udaljenost između dva dijela projektila nakon što padnu na tlo! Gravitacijsko ubrzanje iznosi $g = 10$ m/s^2. Otpor zraka je zanemariv.

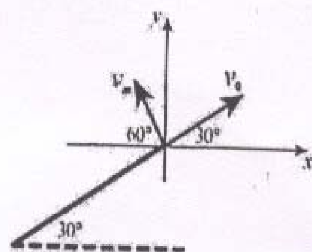
2π rad = 360°

DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE

Varaždin, 2. - 3. svibnja 2010

Srednje škole – 1. skupina
Rješenja i smjernice za bodovanje

Zadatak 1 (17 bodova)



Brzina Jamesa Bonda u trenutku kada se nalazi na rubu mosta je:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_m$$

Gdje je

$v_m = l\omega = \sqrt{3}$ m/s u smjeru 30° u odnosu na vertikalu. (1)

Komponente brzine iznose:

$$v_x = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} - v_m \frac{1}{2} = 3\sqrt{3}\ \text{m/s} \qquad (2)$$

$$v_y = v_0 \frac{1}{2} - v_m \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\ \text{m/s} \qquad (2)$$

Vrijeme leta T Jamesa Boda je:

$$0 = h + v_y T - \frac{1}{2} g T^2$$

Gdje je $h = l/2 = 10$ m. Uvrštavanjem dobivamo jednadžbu:

$$T^2 - T - 2 = 0$$

$$(T-2)(T+1) = 0$$

Prema tome, vrijeme leta je $T = 2$ s. (4)

Horizontalna udaljenost od ruba pokretnog mosta u trenutku skoka do pada je:

$$d = v_x T = 6\sqrt{3}\ \text{m} \qquad (2)$$

Vrijeme potrebno da James Bond dođe od početka do kraja pokretnog mosta je:

$$t_0 = \frac{l}{v_0} = \frac{20}{7}\ \text{s} \qquad (1)$$

Ukupno vrijeme gibanja broda je:

$$t_0 + T = \frac{34}{7}\ \text{s} \qquad (1)$$

Udaljenost koju prijeđe brod je:

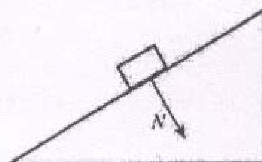
$$s = l - l\frac{\sqrt{3}}{2} + d = 16\sqrt{3} - 20\ \text{m} \qquad (2)$$

Ubrzanje broda jednako je:

$$s = \frac{1}{2} a (t_0 + T)^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{(t_0 + T)^2} = 0.654\ \text{m/s}^2 \qquad (2)$$

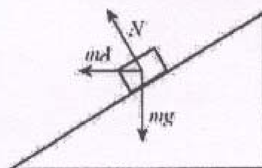
DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE
Varaždin, 2. - 3. svibnja 2010

Zadatak 2 (18 bodova)



Postavimo koordinatni sustav tako da je pozitivan smjer x osi prema desno, a pozitivan smjer y osi prema gore. Na kosinu djeluje sila tijela koje se nalazi na kosini. Kosina ubrzava prema desno ubrzanjem A, a horizontalna komponenta sile na kosinu jednaka je:

$$MA = N\frac{1}{2} \qquad (2)$$



U sustavu kosine na tijelo na kosini djeluju težina, sila reakcije kosine i inercijalna sila. Ubrzanje tijela na kosini je paralelno kosini i ima smjer niz kosinu.

$$ma_p' = mg\frac{1}{2} + mA\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

$$0 = N + mA\frac{1}{2} - mg\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (2)$$

Iz treće jednadžbe slijedi

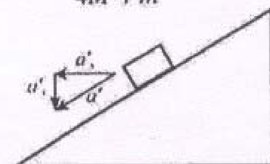
$$N = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - mA\frac{1}{2}$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu za ubrzanje kosine dobije se:

$$A = \frac{mg\sqrt{3}}{4M + m} \qquad (4)$$

Uvrštavanjem A u drugu jednadžbu dobije se ubrzanje tijela mase m:

$$a_p' = \frac{2(M + m)}{4M + m}g \qquad (2)$$



U sustavu kosine komponente ubrzanja tijela mase m su:

$$a_x' = a_p'\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}(M + m)}{4M + m}g \qquad (1)$$

$$a_y' = a_p'\frac{1}{2} = \frac{M + m}{4M + m}g \qquad (1)$$

Ubrzanje tijela mase m u odnosu na promatrača koji miruje na podlozi je:

$$a_x = A - a_x' = -\frac{Mg\sqrt{3}}{4M + m} \qquad (2)$$

$$a_y = a_y' = -\frac{M + m}{4M + m}g \qquad (2)$$

DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE

Varaždin, 2. - 3. svibnja 2010

Zadatak 3 (17 bodova)

Vrijeme pada lopte sa visine h_0 do tla je:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \qquad (1)$$

Brzina kojom lopta prvi put udari u tlo jednaka je:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh_0} \qquad (1)$$

Ako je $p = 0.19$ i $q = 1 - p = 0.81$, za prvi sudar vrijedi:

$$E_{k1} = E_{k0} - pE_{k0} = (1-p)E_{k0} = qE_{k0} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = q\frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{q}v_0 \qquad (1)$$

Maksimalna visina lopte nakon prvog sudara je:

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{qv_0^2}{2g} = qh_0 \qquad (1)$$

Vrijeme između prvog i drugog sudara je:

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{\frac{q2h_0}{g}} \qquad (1)$$

Za drugi sudar vrijedi:

$$E_{k2} = E_{k1} - pE_{k1} = qE_{k1}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = q\frac{1}{2}mv_1^2 = q^2\frac{1}{2}mv_0^2 \Rightarrow v_2 = \left(\sqrt{q}\right)^2 v_0 \qquad (1)$$

Maksimalna visina lopte nakon drugog sudara je:

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{q^2v_0^2}{2g} = q^2h_0 \qquad (1)$$

Vrijeme između prvog i drugog sudara je:

$$t_2 = 2\sqrt{\frac{2h_2}{g}} = 2\sqrt{\frac{q^2 2h_0}{g}} \qquad (1)$$

Ukupno vrijeme koje lopta provede u zraku je:

$$t_{ukupno} = t_0 + t_1 + t_2 + \ldots = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} + 2\sqrt{\frac{q2h_0}{g}} + 2\sqrt{\frac{q^2 2h_0}{g}} + \ldots$$

$$t_{ukupno} = 2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(\frac{1}{1-\sqrt{q}} - \frac{1}{2}\right) \qquad (3)$$

$$t_{ukupno} = 19\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Ukupan put koji prijeđe lopta je:

$$s_{ukupno} = h_0 + 2h_1 + 2h_2 + \ldots = h_0 + 2qh_0 + 2q^2h_0 + \ldots = 2h_0\left(\frac{1}{1-q} - \frac{1}{2}\right) = \frac{181}{19}h_0 \qquad (3)$$

Prosječna brzina lopte je:

$$\overline{v} = \frac{s_{ukupno}}{t_{ukupno}} = \frac{181}{361}\sqrt{\frac{h_0 g}{2}} \qquad (2)$$

DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE

Varaždin, 2. - 3. svibnja 2010

Zadatak 4 (18 bodova)

Horizontalna komponenta početne brzine projektila je:

$v_{0x} = v_0 \frac{1}{2} = 50$ m/s (1)

U trenutku raspada projektil ima samo horizontalnu komponentu brzine v_{0x}. S obzirom da dijelovi ne padnu istovremeno na tlo, neposredno nakon raspada oba dijela imaju y komponentu brzine. Zakon očuvanja količine gibanja glasi:

$mv_{0x} = \frac{m}{2} v_{1x} + \frac{m}{2} v_{2x} \Rightarrow 2v_{0x} = v_{1x} + v_{2x}$ (2)

$0 = \frac{m}{2} v_{1y} - \frac{m}{2} v_{2y} \Rightarrow v_{1y} = v_{2y}$ (2)

Prema tome, jedan dio neposredno nakon raspada ima brzinu u y smjeru v_{1y} prema gore, a drugi dio ima istu y komponentu brzine prema dolje. Jednadžbe gibanja za y komponentu za prvi i drugi dio su:

$y_1(t) = h - v_{1y} t - \frac{1}{2} g t^2$

$y_2(t) = h + v_{1y} t - \frac{1}{2} g t^2$ (3)

Uzmimo da prvi dio padne na tlo za t_1 vremena, a drugi za t_2 vremena pri čemu vrijedi $t_2 - t_1 = T$. Uvrštavanjem u prethodne dvije jednadžbe dobivamo sustav jednadžbi:

$0 = h - v_{1y} t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$

$0 = h + v_{1y} t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$

Rješavanjem sustava jednadžbi dobije se:

$v_{1y} = \frac{1}{2} g T = 20$ m/s (3)

Zakon očuvanja energije za raspad glasi:

$\frac{1}{2} m v_{0x}^2 + \Delta E = \frac{1}{2}\frac{m}{2} v_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{2} v_2^2$ (2)

$2v_{0x}^2 + \frac{4\Delta E}{m} = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + v_{2x}^2 + v_{1y}^2$

Uvrštavanjem $v_{2x} = 2v_{0x} - v_{1x}$

$v_{1x}^2 - 2v_{0x} v_{1x} + v_{1y}^2 + v_{0x}^2 - \frac{2\Delta E}{m} = 0$

$v_{1x}^2 - 100 v_{1x} + 2500 = 0$

$(v_{1x} - 50)^2 = 0 \Rightarrow v_{1x} = 50$ m/s

$v_{2x} = 2v_{0x} - v_{1x} = 50$ m/s (3)

Udaljenost između dva dijela projektila nakon što padnu na tlo je:

$d = v_{2x} t_2 - v_{1x} t_1 = v_{1x}(t_1 + T - t_1) = v_{1x} T = 200$ m (2)

DRŽAVNI SUSRET I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Vinkovci, 05. – 08. svibnja 2011.

Srednje škole – 1. grupa

Zadatak 1 (18 bodova)

Kuglica mase 100 g izbačena je pod kutem 60° u odnosu na horizontalu prema istoku brzinom 20 m/s. Vjetar puše iz smjera jugoistoka prema sjeverozapadu (paralelno sa tlom) te djeluje na kuglicu stalnom silom. Kuglica u trenutku pada na tlo je napravila u smjeru istoka maksimalan mogući pomak.

a) Izračunajte iznos sile vjetra.
b) Izračunajte iznos brzine kuglice u trenutku pada na tlo.
c) Izračunajte udaljenost od položaja s kojeg je kuglica izbačena do položaja pada kuglice na tlo.

Zanemarite rotaciju Zemlje.

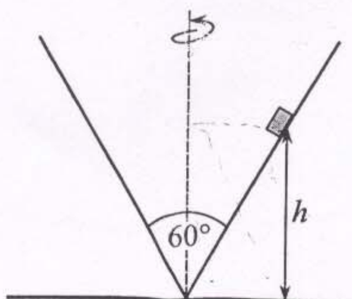
Zadatak 2 (19 bodova)

Čovjek sjedi u vlaku, okrenut licem u smjeru gibanja vlaka i ispred sebe u ruci drži dinamometar i štopericu. Dinamometar se sastoji od utega mase m, koji je obješen na oprugu, i njime se mjeri iznos ukupne sile koja djeluje na uteg. Čovjek zapisuje iznos sile, koji pokazuje dinamometar, i smjer otklona utega. U početnom trenutku vlak polazi sa stanice te se cijelo vrijeme giba po horizontalnim tračnicama. U prvom vremenskom intervalu $\Delta t_1 = 4$ s gibanja uteg je otklonjen prema čovjeku i pokazuje silu 1.25 N. U sljedećem vremenskom intervalu $\Delta t_2 = 8$ s gibanja uteg visi vertikalno i dinamometar pokazuje silu 1 N. Nakon toga u trećem vremenskom intervalu $\Delta t_3 = 2\pi$ s uteg je otklonjen prema lijevo i pokazuje silu 1.25 N. U posljednjem vremenskom intervalu $\Delta t_4 = 3$ s uteg je otklonjen od čovjeka, a sila je jednaka $\sqrt{2}$ N. Gravitacijsko ubrzanje iznosi $g = 10$ m/s^2.

a) Izračunajte ukupan prijeđeni put.
b) Izračunajte brzinu vlaka na kraju četvrtog vremenskog intervala.
c) Skicirajte putanju vlaka i odredite udaljenost vlaka na kraju četvrtog vremenskog intervala od početnog položaja.

Zadatak 3 (15 bodova)

Malo tijelo mase m nalazi se na unutarnjoj strani plašta stošca koji je okrenut vrhom prema dolje i okreće se oko vertikalne osi. Period okretanja stošca je T, a koeficijent statičkog trenja između tijela i plašta stošca je μ. Izračunajte minimalan period kojim se može okretati stožac da tijelo ostane na stalnoj visini h.

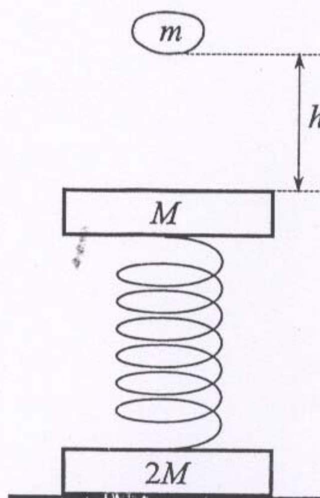


Zadatak 4 (18 bodova)

Dva kvadra masa M i $2M$ povezana su oprugom zanemarive mase i konstante elastičnosti $k = 400$ N/m. U početnom trenutku sustav miruje. Komad plastelina mase $m = 0.5M$ pušten je iz mirovanja sa visine h iznad gornjeg kvadra. Sudar između plastelina i gornjeg kvadra je plastičan (nakon sudara nastavljaju se gibati zajedno). U trenutku kada se gornji kvadar i plastelin nalaze na najvišem položaju, donji kvadar se neznatno odvojio od podloge. Masa gornjeg kvadra je $M = 1$ kg.

a) Izračunajte koliko će se opruga maksimalno stisnuti.

b) Izračunajte visinu h.



DRŽAVNI SUSRET I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Vinkovci, 05. – 08. svibnja 2011.

Srednje škole – 1. grupa – rješenja

Zadatak 1 (18 bodova)

Postavimo koordinatni sustav tako da je pozitivan smjer x osi prema istoku, pozitivan smjer y osi prema sjeveru i pozitivan smjer z osi prema gore. Komponente početne brzine su:

$v_{0x} = \frac{1}{2}v_0$, $v_{0z} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0$ (1 bod)

Komponente ubrzanja kuglice su:

$a_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}a$, $a_y = \frac{1}{\sqrt{2}}a$, $a_z = -g$ (3 boda)

gdje je a ubrzanje koje ima kuglica zbog djelovanja sile vjetra. Ovisnost brzine kuglice o vremenu dana je sljedećim izrazima:

$v_x(t) = \frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}at$, $v_y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}at$, $v_z(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 - gt$ (3 boda)

Ovisnost položaj kuglice o vremenu dana je sljedećim izrazima:

$x(t) = \frac{1}{2}v_0t - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}at^2$, $y(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}at^2$, $z(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ (3 boda)

Vrijeme leta kuglice T može se izračunati iz uvjeta $z(T) = 0$:

$\frac{\sqrt{3}}{2}v_0T - \frac{1}{2}gT^2 = 0 \Rightarrow T = \frac{\sqrt{3}v_0}{g} = 3.53\,\text{s}$ (1 bod)

Iz uvjeta da kuglica napravi maksimalan pomak u smjeru istoka slijedi:

$v_x(T) = 0$

$\frac{1}{2}v_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}a\frac{\sqrt{3}v_0}{g} = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{6}}g = 4\,\text{m/s}^2$ (2 boda)

Iznos sile vjetra je:

$F = ma = 0.4\,\text{N}$ (1 bod)

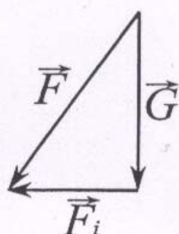
Brzina kuglice u trenutku pada na tlo jednaka je:

$v = \sqrt{v_x(T)^2 + v_y(T)^2 + v_y(T)^2} = v_0 = 20\,\text{m/s}$ (2 boda)

Udaljenost od položaja s kojeg je kuglica izbačena do položaja pada kuglice na tlo je:

$r = \sqrt{x(T)^2 + y(T)^2} = \frac{\sqrt{3}v_0^2}{2\sqrt{2}g} = 25\,\text{m}$ (2 boda)

Zadatak 2 (19 bodova)



Ukupna sila, koja djeluje na uteg, jednaka je vektorskom zbroju težine utega i inercijalne sile.

U prvom vremenskom intervalu vlak se giba jednoliko ubrzano po pravcu.

$F_1^2 = G^2 + F_{i1}^2$

U drugom vremenskom intervalu vlak se giba jednoliko po pravcu, ukupna sila, koja djeluje na uteg, jednaka je težini utega:

$F_2 = G = 1\,\text{N}$ (1 bod)

Prema tome, masa utega jednaka je:

$$m = \frac{G}{g} = 0.1\,\text{kg}$$ (1 bod)

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobije se inercijalna sila na uteg u prvom vremenskom intervalu i ubrzanje vlaka:

$F_{i1}^2 = \sqrt{F_1^2 - G^2} = 0.75\ \text{N}$ (1 bod)

$F_{i1} = ma_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dfrac{F_{i1}}{m} = 7.5\ \text{m/s}^2$ (1 bod)

Brzina na kraju prvog vremenskog intervala i prijeđeni put jednaki su:

$v_1 = a_1 \Delta t_1 = 30\ \text{m/s}$ (1 bod)

$s_1 = \frac{1}{2} a_1 (\Delta t_1)^2 = 60\ \text{m}$ (1 bod)

U drugom vremenskom intervalu vlak se giba jednoliko po pravcu, a prijeđeni put je:

$s_2 = v_1 \Delta t_2 = 240\ \text{m}$ (1 bod)

U trećem vremenskom intervalu vlak skreće prema desno tj. giba se po kružnici brzinom stalnog iznosa. Inercijalna sila je centrifugalna sila:

$F_3^2 = G^2 + F_{cf}^2$

$F_{cf}^2 = \sqrt{F_3^2 - G^2} = 0.75\ \text{N}$ (1 bod)

$F_{cf} = ma_{cf} \quad \Rightarrow \quad a_{cf} = \dfrac{F_{cf}}{m} = 7.5\ \text{m/s}^2$ (1 bod)

Prijeđeni put u trećem vremenskom intervalu:

$s_3 = v_1 \Delta t_3 = 188.5\ \text{m}$ (1 bod)

Vlak se giba po kružnici polumjera r i zakrenuo se za kut:

$a_{cf} = \dfrac{v_1^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \dfrac{v_1^2}{a_{cf}} = 120\ \text{m}$ (1 bod)

$\varphi = \omega \Delta t_3 = \dfrac{v_1}{r} \Delta t_3 = \dfrac{\pi}{2}$ (1 bod)

U četvrtom vremenskom intervalu vlak se giba jednoliko usporeno:

$F_{i4} = \sqrt{F_4^2 - G^2} = 1\ \text{N}$ (1 bod)

$F_{i4} = ma_4 \quad \Rightarrow \quad a_4 = \dfrac{F_{i4}}{m} = 10\ \text{m/s}^2$ (1 bod)

Prijeđeni put u četvrtom vremenskom intervalu je:

$s_4 = v_1 \Delta t_4 - \frac{1}{2} a_4 (\Delta t_4)^2 = 45\ \text{m}$ (1 bod)

Brzina na kraju četvrtog vremenskog intervala je:

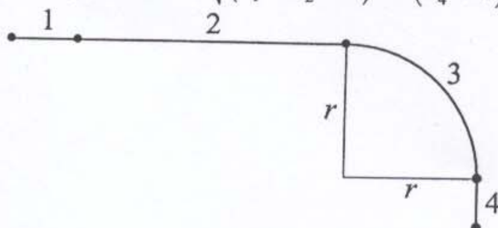
$v_4 = v_1 - a_4 \Delta t_4 = 0\ \text{m/s}$ (1 bod)

Ukupan prijeđeni put je:

$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 533.5\ \text{m}$ (1 bod)

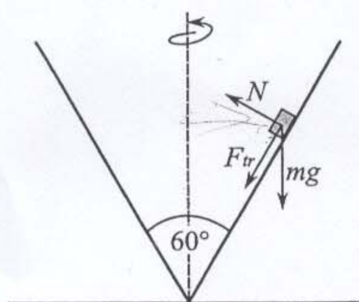
Pomak od početnog položaja je:

$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(s_1 + s_2 + r)^2 + (s_4 + r)^2} = 451.3\ \text{m}$ (1 bod)



(1 bod)

Zadatak 3 (15 bodova)



Traži se minimalni period okretanja stošca za koji tijelo ostaje na stalnoj visini, što znači da bi se za još manji period okretanja stošca tijelo gibalo prema gore tako da sila trenja djeluje prema dolje.

Zbroj svih sila u okomitom smjeru jednak je nuli:

$$0 = \tfrac{1}{2}N - mg - \tfrac{\sqrt{3}}{2}F_{tr}$$ (3 boda)

Zbroj svih sila u smjeru prema osi vrtnje jednak je centripetalnoj sili:

$$F_{cp} = m\frac{v^2}{r} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}N + \tfrac{1}{2}F_{tr}$$ (3 boda)

Sila trenja jednaka je:

$$F_{tr} = \mu N$$ (1 bod)

z prve jednadžbe slijedi:

$$N = \frac{2mg}{1-\mu\sqrt{3}}$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobije se:

$$m\frac{v^2}{r} = mg\frac{\sqrt{3}+\mu}{1-\mu\sqrt{3}}$$ (4 boda)

Brzina kruženja tijela jednaka je:

$$v = \frac{2r\pi}{T}$$ (1 bod)

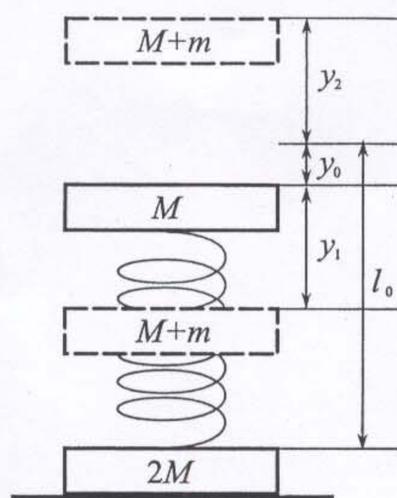
gdje je r polumjer kruženja koji je određen uvjetom da je tijelo na visini h iznad podloge:

$$r = \frac{h}{\sqrt{3}}$$ (1 bod)

Minimalni period jednak je:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\mu\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\mu}}$$ (2 boda)

Zadatak 4 (18 bodova)



Za sudar plastelina i gornjeg kvadra vrijedi zakon očuvanja količine gibanja:

$$0.5Mv_0 = 1.5Mv \quad \Rightarrow \quad v_0 = 3v \qquad \text{(1 bod)}$$

gdje je v_0 jednak:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh} \qquad \text{(1 bod)}$$

Zakon očuvanja energije za spuštanje gornjeg kvadra i plastelina do najniže visine:

$$\frac{1}{2}ky_0^2 + (m+M)gy_1 + \frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}k(y_0+y_1)^2 \qquad \text{(3 boda)}$$

Zakon očuvanja energije za dizanje gornjeg kvadra i plastelina do najviše visine:

$$\frac{1}{2}k(y_0+y_1)^2 = \frac{1}{2}ky_2^2 + (m+M)g(y_0+y_1+y_2)$$

(3 boda)

Visina y_0 određena je uvjetom da sustav u početnom trenutku miruje:

$$ky_0 = Mg \qquad \text{(1 bod)}$$

Visina y_2 određena je uvjetom da je sila opruge na tijelo mase $2M$ jednaka težini tog tijela:

$$ky_2 = 2Mg \qquad \text{(1 bod)}$$

Uvrštavanjem ova dva uvjeta u drugi zakon očuvanja energije dobije se visina za koju će se opruga maksimalno stisnuti:

$$y_1 = \frac{4Mg}{k} = 9.81 \text{ cm} \qquad \text{(4 boda)}$$

Uvrštavanjem u prvi zakon očuvanja energije dobije se tražena visina h:

$$h = \frac{36Mg}{k} = 88.29 \text{ cm} \qquad \text{(4 boda)}$$

DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE
Korčula, 13. – 16. svibnja 2012.

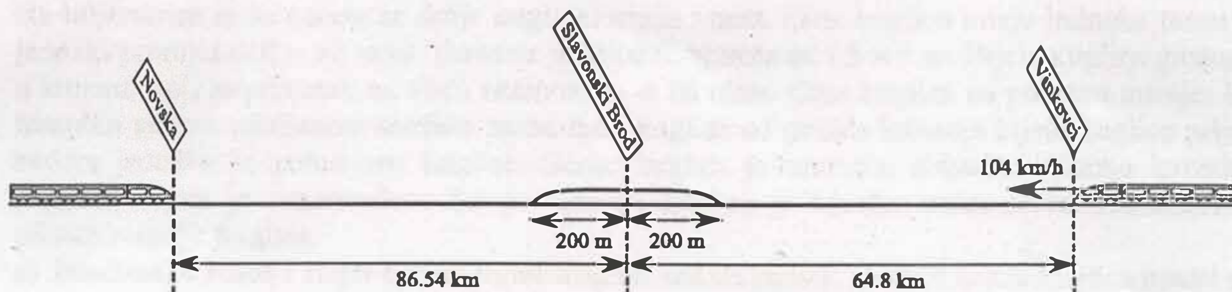
Srednje škole – 1. skupina

Zadatak 1 (17 bodova)

Putnički vlak duljine 79 m vozi na relaciji Novska – Slavonski Brod – Vinkovci. Nakon polaska iz mirovanja putnički vlak ubrzava stalnim ubrzanjem 0.4 m/s^2 dok ne postigne brzinu 72 km/h te zatim nastavlja voziti tom brzinom. Prilikom kočenja putnički vlak usporava usporenjem 0.5 m/s^2. Putnički vlak polazi iz mirovanja iz Novske (početni položaj je prikazan na slici), zaustavi se na stanici u Slavonskom Brodu, stoji na stanici u Slavonskom Brodu 5 min te zatim polazi iz Slavonskog Broda i zaustavlja se u Vinkovcima. Međunarodni brzi vlak vozi na istoj pruzi stalnom brzinom 104 km/h u suprotnom smjeru od gibanja putničkog vlaka. U 11:05:00 sati brzi vlak prolazi stanicom u Vinkovcima (položaj označen na slici) prema Novskoj. U Slavonskom Brodu putnički vlak skreće na sporedni kolosjek kako bi propustio brzi vlak koji vozi u suprotnom smjeru.

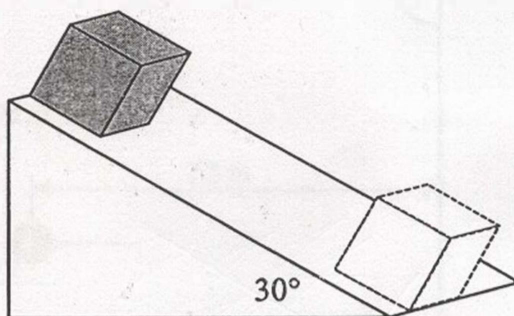
a) Izračunajte ukupno vrijeme putovanja putničkog vlaka od polaska sa stanice u Novskoj do zaustavljanja na stanici u Vinkovcima.
b) U koliko sati najkasnije mora putnički vlak krenuti iz Novske da se ne sudari s brzim vlakom?

Povećanje puta radi zakrivljenosti pruge prilikom prelaska putničkog vlaka na sporedni kolosjek može se zanemariti. Kada se putnički vlak zaustavi na stanicama u Slavonskom Brodu i Vinkovcima, njegov prednji kraj nalazi se točno ispred isprekidane linije na skici (jednako kao položaj na stanici u Novskoj koji je prikazan na slici).



Zadatak 2 (16 bodova)

Kocka duljine stranice 20 cm postavljena je na kosinu visine 0.5 m i nagiba 30°. Kosina se nalazi na horizontalnoj podlozi. Masa kocke dva puta je manja od mase kosine. U početnom trenutku kocka i kosina miruju, a zatim su puštene da se gibaju. Trenje između kocke i kosine je zanemarivo. Trenje između kosine i horizontalne podloge je također zanemarivo.

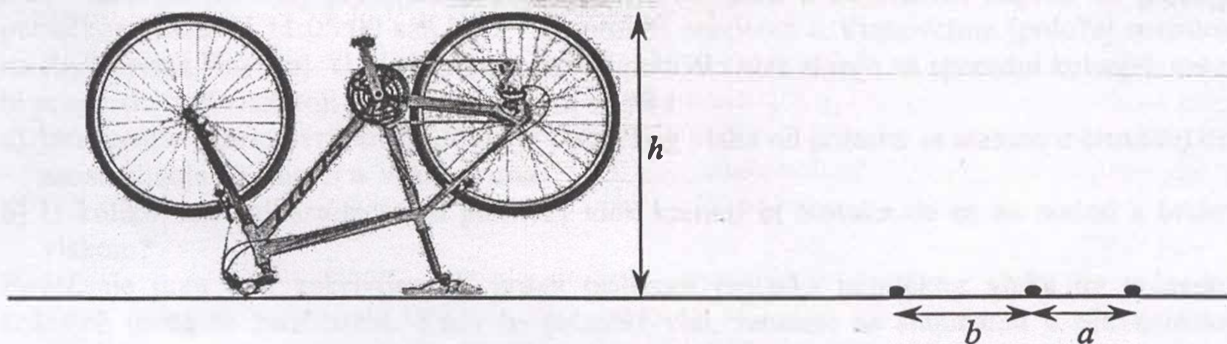


a) Izračunajte nakon koliko vremena će se kocka spustiti do dna kosine. (Konačan položaj kocke označen je isprekidanom linijom.)
b) Koliki će pomak (i u kojem smjeru) u tom vremenu napraviti kosina?

DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE
Korčula, 13. – 16. svibnja 2012.

Zadatak 3 (18 bodova)

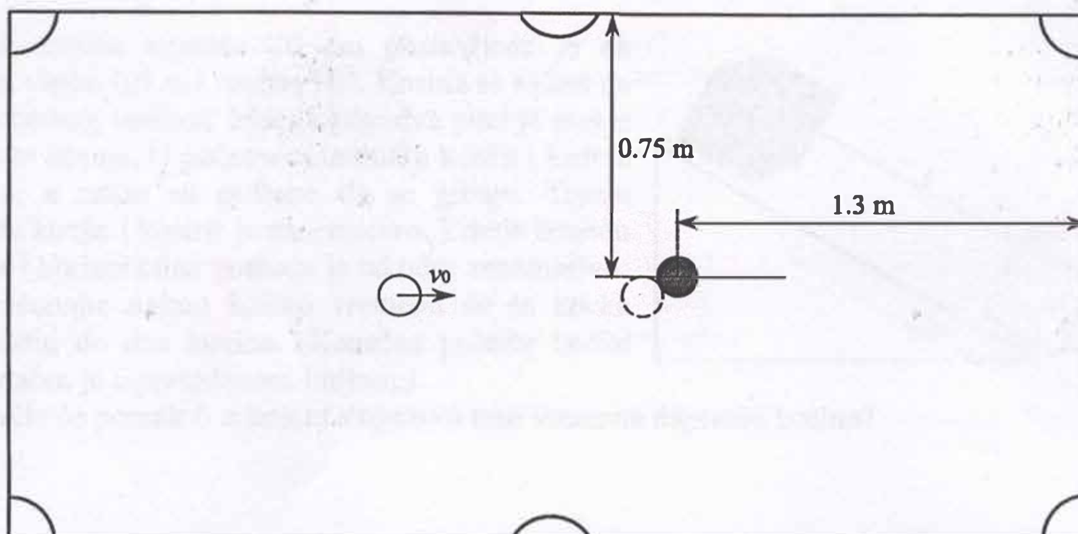
Bicikl je postavljen kao na slici. Polumjer kotača je R, a udaljenost od tla do najviše točke zadnjeg kotača je h. Na jednom dijelu zadnjeg kotača nalazi se mala količina blata. Zadnji kotač zavrtimo određenom početnom kutnom brzinom, a zatim se kotač nastavlja okretati jednoliko usporeno. U svakom trenutku, kada se dio kotača, na kojem se nalazi blato, nađe na najvećoj visini (u odnosu na tlo), s kotača se otkine mala količina blata te padne na tlo. Tri komadića blata, koja su uzastopno pala na tlo, te njihove međusobne udaljenosti prikazane su na slici. Odredite kutno usporenje zadnjeg kotača bicikla. Rezultat izrazite pomoću veličina R, h, a i b.



Zadatak 4 (19 bodova)

Na biljarskom stolu nalaze se dvije kuglice: bijela i crna. Obje kuglice imaju jednaku masu i jednaki promjer ($2R = 52$ mm). Dimenzije biljarskog stola su 1.5×3 m. Bijela kuglica giba se u smjeru, koji je prikazan na slici, brzinom $v_0 = 10$ cm/s. Crna kuglica na početku miruje. U trenutku sudara udaljenost središta mase crne kuglice od pravca kretanja bijele kuglice prije sudara jednaka je polumjeru kuglice. Sudar kuglica je savršeno elastičan. Trenje između kuglica i stola je zanemarivo. Trenje između kuglica je također zanemarivo. Zanemarite učinke rotacije kuglica.

a) Izračunajte iznos i smjer brzine bijele kuglice nakon sudara. Hoće li bijela kuglica upasti u rupu u stolu?
b) Izračunajte iznos i smjer brzine crne kuglice nakon sudara. Hoće li crna kuglica upasti u rupu u stolu?



DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE
Korčula, 13. – 16. svibnja 2012.

Srednje škole – 1. skupina
Rješenja i smjernice za bodovanje

Zadatak 1 (17 bodova)

Vrijeme ubrzavanja i put, koji putnički vlak prijeđe za vrijeme ubrzavanja, su:

$t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \frac{20\,\text{m/s}}{0.4\,\text{m/s}^2} = 50\,\text{s}$, $s_1 = \frac{v_0^2}{2a_1} = 500\,\text{m}$ **(2 boda)**

Vrijeme kočenja i put, koji putnički vlak prijeđe za vrijeme kočenja, su:

$t_2 = \frac{v_0}{a_2} = \frac{20\,\text{m/s}}{0.5\,\text{m/s}^2} = 40\,\text{s}$, $s_2 = \frac{v_0^2}{2a_2} = 400\,\text{m}$ **(2 boda)**

Put između Novske i Slavonskog Broda, koji vlak prijeđe gibajući se stalnom brzinom v_0, jednak je:

86.54 km – 0.5 km – 0.4 km = 85.64 km **(1 bod)**

Vrijeme gibanja vlaka stalnom brzinom v_0 između Novske i Slavonskog Broda jednako je:

$t = \frac{85640\,\text{m}}{20\,\text{m/s}} = 4282\,\text{s} = 71\,\text{min i } 22\,\text{s}$ **(1 bod)**

Put između Slavonskog Broda i Vinkovaca, koji vlak prijeđe gibajući se stalnom brzinom v_0, jednak je:

64.8 km – 0.5 km – 0.4 km = 63.9 km **(1 bod)**

Vrijeme gibanja vlaka stalnom brzinom v_0 između Slavonskog Broda i Vinkovaca jednako je:

$t = \frac{63900\,\text{m}}{20\,\text{m/s}} = 3195\,\text{s} = 53\,\text{min i } 15\,\text{s}$ **(1 bod)**

Ukupno vrijeme putovanja putničkog vlaka od Novske do Vinkovaca je:

$2 \cdot 50\,\text{s} + 2 \cdot 40\,\text{s} + 4282\,\text{s} + 3195\,\text{s} + 300\,\text{s} = 7957\,\text{s} = 2\,\text{h}, 12\,\text{min}, 37\,\text{s}$ **(1 bod)**

Zadnji kraj putničkog vlaka mora se nalaziti na odvajanju na sporedni kolosjek u trenutku kada prednji kraj brzog vlaka dolazi do istog odvajanja da se vlakovi ne sudare. Do tog trenutka brzi vlak prijeđe 64.8 km + 0.2 km = 65 km i za to mu je potrebno

$\frac{65\,\text{km}}{104\,\text{km/h}} = 0.625\,\text{h} = 37\,\text{min i } 30\,\text{s}$ **(2 boda)**

Prema tome, brzi vlak nalazi se na danom mjestu u 11:42:30 sati.

Putnički vlak počne kočiti 200 m prije odvajanja na sporedni kolosjek, što znači da će kočiti na dijelu puta duljine 200 m + 79 m = 279 m **(1 bod)**, a vrijeme koje mu je potrebno da prijeđe taj dio puta jednako je:

$279\,\text{m} = (20\,\text{m/s}) \cdot t - \frac{1}{2}(0.5\,\text{m/s}^2)t^2$

$t^2 - 80t - 1116 = 0$

$(t-18)(t-62) = 0$ **(3 boda)**

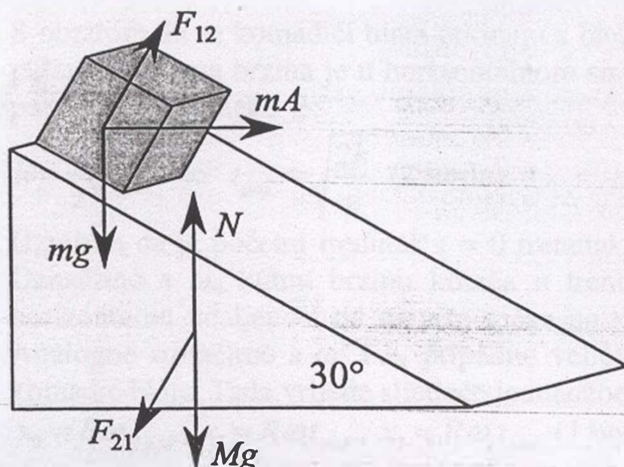
Fizikalno prihvatljivo rješenje jednadžbe je 18 s. Dakle, ukupno vrijeme jednako je:

50 s + 4282 s + 18 s = 4350 s = 1 h, 12 min i 30 s **(1 bod)**

Prema tome, putnički vlak mora krenuti iz Novske najkasnije u 10:30:00 sati. **(1 bod)**

DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE
Korčula, 13. – 16. svibnja 2012.

Zadatak 2 (16 bodova)



Dijagram sila: **3 boda**

Kosina se giba ulijevo jednoliko ubrzano ubrzanjem A. Primjenom 2. Newtonovog zakona dolazimo do jednadžbi gibanja za kocku u sustavu kosine u smjeru paralelno kosini i okomito na kosinu i za kosinu u smjeru paralelno podlozi:

$ma = \frac{1}{2}mg + \frac{\sqrt{3}}{2}mA$ **(1 bod)**

$0 = F_{12} + \frac{1}{2}mA - \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ **(1 bod)**

$MA = \frac{1}{2}F_{21}$ **(1 bod)**

Iz treće jednadžbe slijedi:

$F_{21} = 2MA$

Zbog 3. Newtonovog zakona $F_{21} = F_{12}$ **(1 bod).**

Iz druge jednadžbe slijedi:

$0 = 4MA + mA - \sqrt{3}mg$

$A = \frac{\sqrt{3}mg}{4M+m} = \frac{\sqrt{3}g}{9} = 1.89\ \mathrm{m/s^2}$ **(2 boda)**

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobije se:

$a = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3m}{4M+m}\right)g$

S obzirom da je $M = 2m$ dobije se

$a = \frac{2}{3}g = 6.54\ \mathrm{m/s^2}$ **(4 boda)**

Vrijeme potrebno da kocka dođe do dna kosine jednako je:

$t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.8\ \mathrm{m}}{6.54\ \mathrm{m/s^2}}} = 0.5\ \mathrm{s}$ **(2 boda)**

Kosina za to vrijeme napravi pomak ulijevo:

$s = \frac{1}{2}At^2 = 0.23\ \mathrm{m}$ **(1 bod)**

DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE

Korčula, 13. – 16. svibnja 2012.

Zadatak 3 (18 bodova)

S obzirom da se komadići blata otkidaju s bicikla u trenutku kada se nalaze na najvišoj točki putanje, njihova brzina je u horizontalnom smjeru. Vrijeme potrebno da svaki komadić blata padne na tlo jednako je:

$$h=\frac{1}{2}gt_{pad}^{2} \Rightarrow t_{pad}=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$ **(2 boda)**

Uzmimo da je početni trenutak $t = 0$ trenutak kada se prvi komadić blata odvoji od kotača. Označimo s ω_0 kutnu brzinu kotača u trenutku odvajanja prvog komadića blata, a s x_0 horizontalnu udaljenost od najviše točke na kotaču do mjesta pada prvog komadića na tlo. Analogno označimo s ω_1 i x_1 pripadne veličine za drugi komadić blata i s ω_2 i x_2 za treći komadić blata. Tada vrijede sljedeće jednadžbe:

$$x_0=R\omega_0 t_{pad},\; x_1=R\omega_1 t_{pad},\; x_2=R\omega_2 t_{pad}$$ **(1 bod)**

$$a=x_0-x_1=Rt_{pad}(\omega_0-\omega_1)$$

$$b=x_1-x_2=Rt_{pad}(\omega_1-\omega_2)$$

$$a+b=x_0-x_2=Rt_{pad}(\omega_0-\omega_2)$$ **(1 bod)**

Vrijeme od početka gibanja do trenutka odvajanja drugog komadića blata (vrijeme potrebno da kotač napravi jedan okret) je t_1, a vrijeme od početka gibanja do trenutka odvajanja trećeg komadića blata (vrijeme potrebno da kotač napravi dva okreta) je t_2.

$$\omega_1=\omega_0-\alpha t_1 \Rightarrow t_1=\frac{\omega_0-\omega_1}{\alpha},\; \omega_2=\omega_0-\alpha t_2 \Rightarrow t_2=\frac{\omega_0-\omega_2}{\alpha}$$ **(2 boda)**

$$t_1+t_2=\frac{2\omega_0-\omega_1-\omega_2}{\alpha},\; t_2-t_1=\frac{\omega_1-\omega_2}{\alpha}$$ **(1 bod)**

$$2\pi=\omega_0 t_1-\frac{1}{2}\alpha t_1^2$$ **(1 bod)**

$$4\pi=\omega_0 t_2-\frac{1}{2}\alpha t_2^2$$ **(1 bod)**

Od posljednje jednadžbe oduzmemo pretposljednju:

$$2\pi=\omega_0(t_2-t_1)-\frac{1}{2}\alpha(t_2^2-t_1^2)=(t_2-t_1)\left(\omega_0-\frac{1}{2}\alpha(t_2+t_1)\right)=\frac{(\omega_1-\omega_2)(\omega_1+\omega_2)}{2\alpha}$$ **(2 boda)**

Uvrštavanjem izraza za t_1 u prvu jednadžbu za prijeđeni kut dobije se:

$$2\pi=\omega_0\frac{\omega_0-\omega_1}{\alpha}-\frac{1}{2}\alpha\frac{(\omega_0-\omega_1)^2}{\alpha^2}=\frac{(\omega_0-\omega_1)(\omega_0+\omega_1)}{2\alpha}$$ **(2 boda)**

Prethodna dva izraza možemo izjednačiti:

$$(\omega_0-\omega_1)(\omega_0+\omega_1)=(\omega_1-\omega_2)(\omega_1+\omega_2)$$

$$(\omega_0-\omega_1)(\omega_0+\omega_1)=(\omega_1-\omega_2)(\omega_1+\omega_0-\omega_0+\omega_2)$$

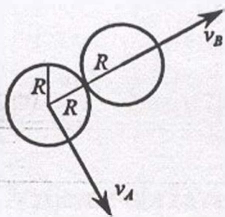
$$(\omega_0-\omega_1)(\omega_0+\omega_1)=(\omega_1-\omega_2)(\omega_1+\omega_0)-(\omega_1-\omega_2)(\omega_0-\omega_2)$$

$$(\omega_0+\omega_1)[(\omega_1-\omega_2)-(\omega_0-\omega_1)]=(\omega_1-\omega_2)(\omega_0-\omega_2) \Rightarrow (\omega_0+\omega_1)=\frac{(\omega_1-\omega_2)(\omega_0-\omega_2)}{(\omega_1-\omega_2)-(\omega_0-\omega_1)}$$

$$2\pi=\frac{(\omega_0-\omega_1)(\omega_1-\omega_2)(\omega_0-\omega_2)}{2\alpha[(\omega_1-\omega_2)-(\omega_0-\omega_1)]} \Rightarrow \alpha=\frac{(\omega_0-\omega_1)(\omega_1-\omega_2)(\omega_0-\omega_2)}{4\pi[(\omega_1-\omega_2)-(\omega_0-\omega_1)]}=\frac{ab(a+b)}{4\pi R^2 t_{pad}^2(b-a)}$$

$$\alpha=\frac{ab(a+b)g}{8\pi R^2 h(b-a)}$$ **(5 bodova)**

DRŽAVNO NATJECANJE I SMOTRA IZ FIZIKE
Korčula, 13. – 16. svibnja 2012.
Zadatak 4 (19 bodova)



U trenutku sudara sila bijele kuglice na crnu djeluje okomito na točku dodira te dvije kuglice te crna kuglica dobiva brzinu u tom smjeru. Sa slike možemo vidjeti da je smjer brzine kuglice B (crna) nakon sudara 30° u odnosu na smjer početne brzine kuglice A (bijele). **(2 boda)**

Postavimo koordinatni sustav tako da je x os paralelna početnoj brzini kuglice A, a y os okomita na nju. Zakon očuvanja količine gibanja:

$mv_0 = mv_{Ax} + mv_{Bx}$ **(1 bod)**

$0 = mv_{Ay} - mv_{By}$ **(1 bod)**

Z brzine kuglica nakon sudara vrijedi:

$v_A^2 = v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2$ i $v_B^2 = v_{Bx}^2 + v_{By}^2$ **(1 bod)**

Zakon očuvanja energije:

$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}mv_B^2$ **(1 bod)**

Iz prve jednadžbe slijedi:

$(v_0 - v_{Bx})^2 = v_{Ax}^2$

$v_0^2 + v_{Bx}^2 - 2v_0 v_{Bx} = v_{Ax}^2$

Uvrštavanjem $v_{Bx}^2 = v_B^2 - v_{By}^2$ i $v_{Ay} = v_{By}$ dobije se:

$v_0^2 + v_B^2 - v_{Ay}^2 - 2v_0 v_{Bx} = v_{Ax}^2$

$v_0^2 + v_B^2 - v_A^2 = 2v_0 v_{Bx}$

Uvrštavanjem $v_A^2 = v_0^2 - v_B^2$ i uzimanjem u obzir da je $\frac{v_{Bx}}{v_B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **(1 bod)** dobije se:

$v_B^2 = v_0 v_{Bx} \Rightarrow v_B = v_0 \frac{v_{Bx}}{v_B} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 = 5\sqrt{3}\ \text{cm/s} = 8.66\ \text{m/s}$ **(2 boda)**

$v_A = \sqrt{v_0^2 - v_B^2} = \frac{1}{2} v_0 = 5\ \text{cm/s}$ **(2 boda)**

Rješavanje sustava jednadžbi: **4 boda**

Smjer brzine kuglice A nakon sudara odredimo pomoću komponenti brzine kuglice A nakon sudara:

$v_{Ay} = v_{By} = \frac{1}{2} v_B = \frac{\sqrt{3}}{4} v_0 = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ \text{cm/s} = 4.33\ \text{m/s}$

$v_{Ax} = \sqrt{v_A^2 - v_{Ay}^2} = \frac{1}{4} v_0 = 2.5\ \text{m/s}$

$\frac{v_{Ay}}{v_{Ax}} = \sqrt{3} \Rightarrow$ kut između smjera brzine kuglice A prije i nakon sudara je 60°. **(2 boda)**

<u>Crna kuglica</u> upast će u rupu na stolu ako je $\sqrt{0.75^2 + 1.3^2}$ jednako $2 \cdot 0.75$:

$\sqrt{0.75^2 + 1.3^2} = 1.5 = 2 \cdot 0.75 \Rightarrow$ crna kuglica će upasti u rupu **(1 bod)**

Bijela kuglica će upasti u rupu ako je $\sqrt{0.724^2 + 1.352^2}$ jednako $\frac{1}{2}1.352$

$\sqrt{0.724^2 + 1.352^2} = 1.534 \neq 0.676 = \frac{1}{2}1.352 \Rightarrow$ bijela kuglica neće upasti u rupu **(1 bod)**

DRŽAVNI SUSRET I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Biograd na Moru, 2. – 5. svibnja 2013.

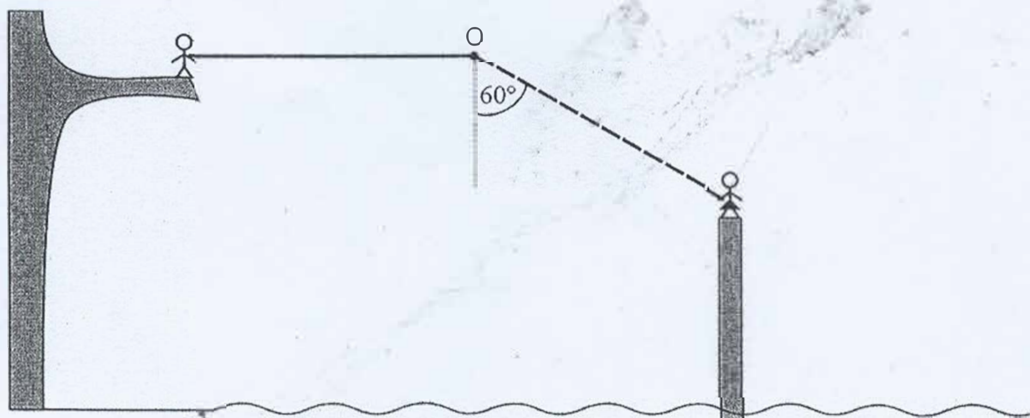
Srednje škole – 1. grupa

Zadatak 1 (17 bodova)

U početnom trenutku Tarzan se nalazi na drvetu, a Jane na mostu, kao što je prikazano na slici. Držeći se za nerastezljivu lijanu zanemarive mase i duljine 9.2 m, čiji je drugi kraj učvršćen u točki O, Tarzan se spušta prema Jane. Kada se nađe na položaju u kojem je lijana označena isprekidanom linijom, Tarzan ispušta lijanu i uhavati Jane. Tarzan i Jane nastavljaju se zajedno gibati te padaju u jezero na horizontalnoj udaljenosti 5.7 m od mosta.

a) Izračunajte brzinu sustava Tarzan+Jane u početnom trenutku njihovog zajedničkog gibanja te skicirajte vektor njihove brzine.
b) Izračunajte visinu mosta.
c) Skicirajte putanju po kojoj su se Tarzan i Jane gibali do pada u jezero.

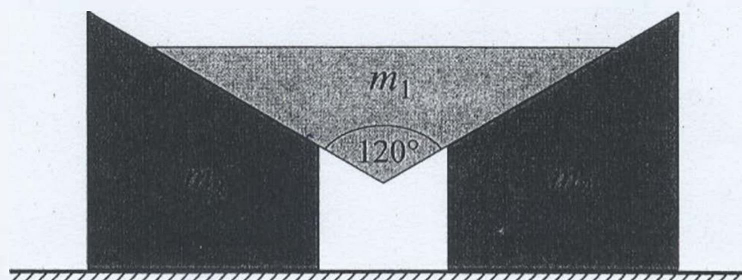
Masa Tarzana je 90 kg, a masa jane je 60 kg. Zanemarite dimenzije Tarzana i Jane te otpor zraka.



Zadatak 2 (18 bodova)

Mali Ivica slaže različita geometrijska tijela na horizontalnoj podlozi. Dva jednaka tijela mase m_2 = 400 g postavio je na horizontalnu podlogu, a na njih je stavio tijelo mase m_1 = 500 g kao što je prikazano na slici. Trenje između oba tijela mase m_2 i tijela mase m_1 je zanemarivo.

a) Pretpostavite da je trenje između horizontalne podloge i oba tijela mase m_2 zanemarivo te izračunajte iznos i smjer ubrzanja sva tri tijela kojim će se gibati kad ih se pusti iz položaja koji je prikazan na slici.
b) Izračunajte koliki treba biti koeficijent trenja između horizontalne podloge i oba tijela mase m_2 da tri tijela miruju u položaju koji je prikazan na slici.

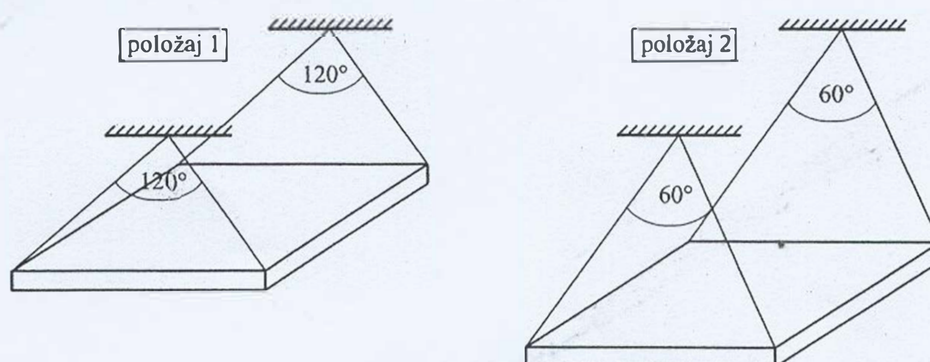


Zadatak 3 (19 bodova)

Pravokutna ploča mase 1.5 kg obješena je pomoću četiri jednake elastične niti zanemarive mase za dva objesišta kao što je prikazano na slici. Objesišta se nalaze točno iznad prednje, odnosno stražnje stranice ploče. U početnom položaju (položaj 1 na slici) ploča miruje, niti zatvaraju kut 120°, a duljina svake niti je 25 cm. Sa visine 1 m iznad gornje stranice ploče puštena je kuglica mase m iz mirovanja. Kuglica pada na središte ploče, a sudar kuglice i ploče je elastičan. Nakon sudara maksimalna visina, koju kuglica postiže, je 0.25 m iznad gornje stranice ploče u početnom položaju. Na minimalnoj visini, na koju se ploča spušta nakon sudara, niti zatvaraju kut 60° (položaj 2 na slici). Produljenje elastičnih niti određeno je Hookovim zkonom, odnosno produljenje je proporcionalno sili koja rasteže nit. Uzmite da je $g = 10\ \text{m/s}^2$.

a) Izračunajte masu kuglice.

b) Izračunajte konstantu elastičnosti niti.



Zadatak 4 (16 bodova)

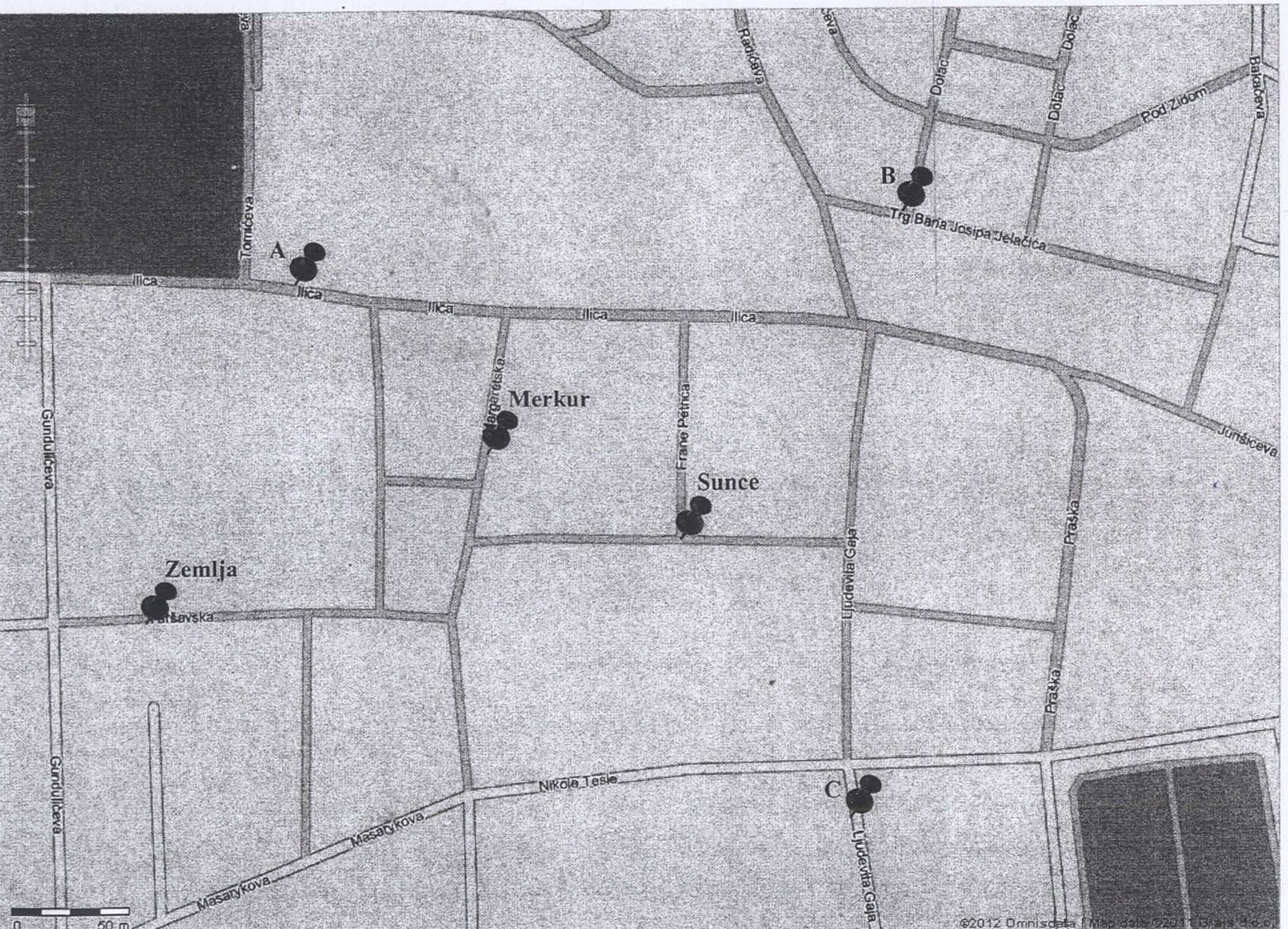
Skulptura *Prizemljeno Sunce* djelo je akademskog kipara Ivana Kožarića, a nalazi se u užem središtu Zagreba u Bogovićevoj ulici. Skulptura ima oblik kugle te predstavlja model Sunca. Na širem području Zagreba smješten je i model cijelog Sunčevog sustava – umjetnička instalacija *Devet pogleda* čiji je autor Davor Preis. Udaljenost svakog „prizemljenog" planeta Sunčevog sustava od Prizemljenog Sunca umanjena je za faktor k_1 u odnosu na stvarnu prosječnu udaljenost pojedinog planeta od Sunca. Također, uzimajući u obzir promjer Prizemljenog Sunca i stvarnog Sunca, promjeri „prizemljenih" planeta umanjeni su za faktor k_2 u odnosu na stvarne promjere planeta. Na priloženoj karti označeni su položaji Prizemljenog Sunca, „prizemljenog" Merkura i „prizemljene" Zemlje. Period obilaska Zemlje oko Sunca iznosi 365.26 dana, a period obilaska Venere oko Sunca iznosi 224.7 dana. Pretpostavite da se planeti gibaju po kružnim putanjama oko Sunca, sa Suncem u središtu kružnice. Masa Zemlje je $5.97 \cdot 10^{24}$ kg, masa Sunca je $1.989 \cdot 10^{30}$ kg, gravitacijska konstanta je $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

a) Izračunajte polumjer Zemljine putanje oko Sunca. Koristeći kartu odredite faktor k_1 za koji su umanjene udaljenosti planeta od Sunca u zagrebačkom modelu Sunčevog sustava.

b) Odredite koji od označenih položaja A, B, C odgovara položaju „prizemljene" Venere.

c) Izračunajte period obilaska Merkura oko Sunca.

d) „Prizemljeni" planeti izrađeni su od nehrđajućeg čelika gustoće 7900 kg/m^3. Izračunajte kolika bi trebala biti gustoća materijala od kojeg je izrađeno Prizemljeno Sunce da i mase modela Sunca i planeta budu umanjene isti faktor k_3. Promjer Prizemljenog Sunca je 2 m, a promjer „prizemljene" Zemlje je 18 mm.


Tomićeva
A
Ilica
Radićeva
B
Dolac
Pod Zidom
Bakačeva
Trg Bana Josipa Jelačića
Jurišićeva
Margaretska
Merkur
Frane Petrića
Sunce
Praška
Ljudevita Gaja
Zemlja
Gundulićeva
Nikole Tesle
Masarykova
C
0
50 m
©2012 Omnisdata | Map data ©2011 Ojaris d.o.o.

DRŽAVNI SUSRET I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Biograd na Moru, 2. – 5. svibnja 2013.

Srednje škole – 1. grupa
Rješenja i smjernice za bodovanje

Zadatak 1 (17 bodova)

Brzina Tarzana u trenutku ispuštanja lijane tj. neposredno prije hvatanja Jane može se izračunati iz zakona očuvanja energije:

$$m_T g \frac{l}{2} = \frac{1}{2} m_T v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{gl} = 9.5\ \text{m/s}\ \textbf{(3 boda)}$$

Smjer brzine v_0 je 60° u odnosu na horizontalu (1 bod) pa su komponente brzine jednake:

$$v_{0x} = \frac{1}{2} v_0,\ v_{0y} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_0\ \textbf{(1 bod)}$$

Komponente brzine sustava Tarzan+Jane neposredno nakon „sudara" odredimo pomoću zakona očuvanja količine gibanja:

$$m_T v_{0x} = (m_T + m_J) u_{0x},\ m_T v_{0y} = (m_T + m_J) u_{0y}\ \textbf{(2 boda)}$$

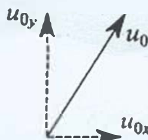
Slijedi:

$$u_{0x} = \frac{m_T}{m_T + m_J} \cdot \frac{1}{2} v_0 = 2.85\ \text{m/s},\ u_{0y} = \frac{m_T}{m_T + m_J} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} v_0 = 4.94\ \text{m/s}\ \textbf{(2 boda)}$$

Prema tome, njihova brzina na početku zajedničkog gibanja jednaka je:

$$u = \sqrt{u_{0x}^2 + u_{0y}^2} = \frac{m_T}{m_T + m_J} v_0 = \frac{3}{5} v_0 = 5.7\ \text{m/s}\ \textbf{(1 bod)}$$

Vektor brzine je (1 bod):



Vrijeme potrebno da Tarzan i Jane padnu u jezero jednako je:

$$t = \frac{d}{u_{0x}} = 2\ \text{s}\ \textbf{(2 boda)}$$

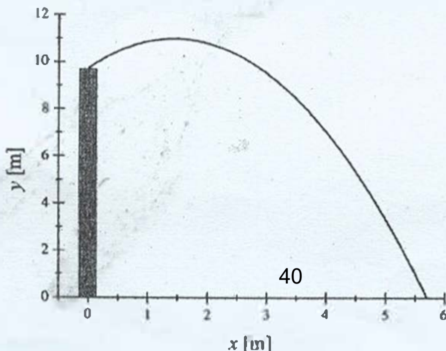
Visina mosta može se izračunati razmatrajući gibanje u vertikalnom smjeru:

$$y(t) = h + u_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2\ \textbf{(1 bod)}$$

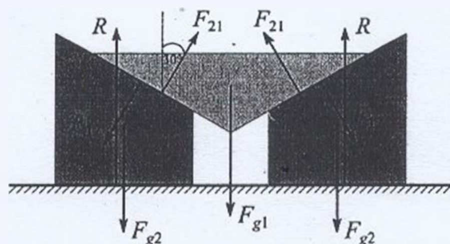
Uvršavanjem vremena potrebnog za pad u jezero dobije se:

$$h = -\frac{d u_{0y}}{u_{0x}} + \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{u_{0x}}\right)^2 = 9.74\ \text{m}\ \textbf{(1 bod)}$$

Putanja po kojoj se Tarzan i Jane gibaju prikazana je na slici (1 bod):



Zadatak 2 (18 bodova)

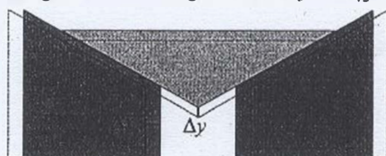


Ako nema trenja, na tijelo mase m_1 djeluju sile: težina, sila lijevog tijela mase m_2 i sila desnog tijela mase m_2 (radi simetrije sile lijevog i desnog tijela mase m_2 na tijelo mase m_1 su jednake). Na tijelo mase m_2 djeluju sile: težina, sila tijela mase m_1 i sila horizontalne podloge (također radi simetrije, dovoljno je razmatrati samo jedno tijelo mase m_2).

Primjenom 2. Newtonovog zakona na tijela mase m_1 i m_2 dobiju se jednadžbe:

$$m_1 a_1 = F_{g1} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}F_{21} \text{ (2 boda)}, \quad m_2 a_2 = \frac{1}{2}F_{12} \text{ (2 boda)}$$

Zbog 3. Newtonovog zakona vrijedi $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ tj. $F_{12} = F_{21}$ **(1 bod)**



Potrebno je još naći vezu između ubrzanja a_1 i a_2. U istom vremenskom intervalu tijelo mase m_1 pomakne se za Δy, a tijelo mase m_2 za Δx. Sa slike se vidi da vrijedi:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a_1}{a_2} \text{ (2 boda)}$$

Uvrštavanjem u gornje jednadžbe dobije se:

$$m_1 a_1 = F_{g1} - 2\sqrt{3}m_2 a_2$$

$$m_1 a_1 = m_1 g - 2\sqrt{3}m_2\cdot\sqrt{3}a_1$$

$$(m_1 + 6m_2)a_1 = m_1 g$$

$$a_1 = \frac{m_1}{m_1 + 6m_2}g = \frac{0.5}{0.5 + 6\cdot 0.4}9.81\text{ m/s}^2 = 1.69\text{ m/s}^2 \text{ (2 boda)}$$

$$a_2 = \sqrt{3}a_1 = \sqrt{3}\frac{m_1}{m_1 + 6m_2}g = \sqrt{3}\frac{0.5}{0.5 + 6\cdot 0.4}9.81\text{ m/s}^2 = 2.93\text{ m/s}^2 \text{ (2 boda)}$$

Smjer ubrzanja tijela mase m_1 je prema dolje. Smjer ubrzanja lijevog tijela mase m_2 je ulijevo, a smjer ubrzanja desnog tijela mase m_2 je udesno. **(1 bod)**

Ako postoji trenje između horizontalene podloge i oba tijela mase m_2, na njih osim prikazanih sila djeluje još i sila trenja. Sila trenja djeluje u horizontalnom smjeru i to udesno na lijevo tijelo te ulijevo na desno tijelo mase m_2. Iz uvjeta da sustav miruje slijede jednadžbe:

$$0 = F_{g1} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}F_{21} \text{ (1 bod)}, \quad 0 = \frac{1}{2}F_{12} - F_{tr} \text{ (1 bod)}, \quad 0 = F_{g2} + \frac{\sqrt{3}}{2}F_{12} - R \text{ (1 bod)}$$

Sila trenja je $F_{tr} = \mu R$ **(1 bod)**

Uvrštavanjem se dobije:

$$F_{21} = F_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}F_{g1}$$

$$F_{tr} = \mu\left(F_{g2} + \frac{1}{2}F_{g1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}F_{g1}$$

$$\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{m_1}{m_2 + \frac{1}{2}m_1} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{0.5}{0.4 + 0.25} = \frac{5}{13\sqrt{3}} = 0.222 \text{ (2 boda)}$$

Zadatak 3 (19 bodova)

Zakon očuvanja količine gibanja za sudar kuglice i ploče:

$mv_1 = -mu_1 + Mu_2$ **(1 bod)**

Zakon očuvanja energije za sudar kuglice i ploče:

$\frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}Mu_2^2$ **(1 bod)**

Brzine kuglice neposredno prije i nakon sudara jednake su:

$v_1^2 = 2gh_1$ **(1 bod)**

$u_1^2 = 2gh_2 = 2g\frac{h_1}{4} = \frac{v_1^2}{4} \Rightarrow u_1 = \frac{v_1}{2}$ **(2 boda)**

Uvrštavanjem u zakone očuvanja dobije se:

$\frac{3}{2}mv_1 = Mu_2$

$\frac{3}{4}mv_1^2 = Mu_2^2 = \frac{3}{2}mv_1u_2 \Rightarrow u_2 = \frac{v_1}{2}$ **(1 bod)**

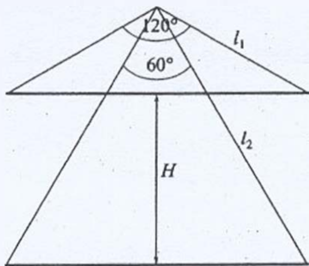
$\frac{3}{2}mv_1 = M\frac{v_1}{2} \Rightarrow \frac{M}{m} = 3, m = \frac{M}{3} = 0.5\,\mathrm{kg}$ **(1 bod)**

U početnom položaju ploča miruje pa je zbroj svih sila na ploču jednak nuli:

$0 = Mg - 4\cdot\frac{1}{2}T$ **(2 boda)**

gdje je T sila napetosti niti koja je jednaka $T = kx_1$, gdje je k konstanta elastičnosti, a x_1 produljenje niti. Slijedi:

$Mg = 2kx_1 \Rightarrow x_1 = \frac{Mg}{2k}$ **(1 bod)**



Sa slike se vidi da vrijedi: $\frac{1}{2}l_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}l_1 \Rightarrow l_2 = \sqrt{3}l_1$ **(1 bod)**

Visina H za koju se ploča spusti jednaka je:

$H = \frac{\sqrt{3}}{2}l_2 - \frac{1}{2}l_1$ **(1 bod)**

Produljenje niti u početnom položaju je $x_1 = l_1 - l_0$, gdje je l_0 duljina nerastegnute niti.

Produljenje niti u najnižem položaju jednako je: $x_2 = l_2 - l_0 = l_2 - l_1 + l_1 - l_0 = x_1 + (\sqrt{3} - 1)l_1$ **(1 bod)**

Zakon očuvanja energije za spuštanje ploče od početnog položaja nakon sudara do najnižeg položaja u kojem je brzina ploče jednaka nuli je:

$\frac{1}{2}Mu_2^2 + 4\cdot\frac{1}{2}kx_1^2 = -MgH + 4\cdot\frac{1}{2}kx_2^2$ **(2 boda)**

Uvrštavanjem izraza za u_2, x_1, H i x_2 dobije se:

$\frac{1}{4}Mgh_1 = -Mgl_1 + 4k(\sqrt{3} - 1)\frac{Mg}{2k}l_1 + 2k(\sqrt{3} - 1)^2 l_1^2$

Iz prethodne jednadžbe za konstantu elastičnosti niti se dobije:

$k = \frac{Mg}{4l_1}\left[\frac{h_1}{4(2 - \sqrt{3})l_1} - \sqrt{3}\right] = 30\,\mathrm{N/m}$ **(4 boda)**

Zadatak 4 (16 bodova)

Za gibanje Zemlje oko Sunca vrijedi:

$F_{cp} = F_g$ **(1 bod)**

$$m_Z \frac{v^2}{r_Z} = G\frac{m_Z m_S}{r_Z^2} \quad \textbf{(1 bod)}$$

Brzina gibanja Zemlje može se izraziti pomoću perioda gibanja:

$$v = \frac{2r_Z\pi}{T_Z} \quad \textbf{(1 bod)}$$

Uvrštavanjem slijedi:

$$r_Z^3 = \frac{Gm_S T_Z^2}{4\pi^2} \Rightarrow r_Z = \sqrt[3]{\frac{Gm_S T_Z^2}{4\pi^2}} = 1.496\cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \quad \textbf{(1 bod)}$$

Udaljenost „prizemljene" Zemlje od Prizemljenog Sunca na karti je 9.2 cm **(1 bod)**, uzimajući u obzir mjerilo karte (2 cm = 50 m), njihova stvarna udaljenost je $r_Z' = 9.2\cdot 25\,\mathrm{m} = 230\,\mathrm{m}$ **(1 bod)**, što znači da su udaljenosti umanjene za faktor:

$k_1 = 1.496\cdot 10^{11}/230 = 6.5\cdot 10^8$ **(1 bod)**

Iz prethodne jednadžbe slijedi jednakost (koja je također poznata i kao 3. Keplerov zakon):

$$\frac{r_Z^3}{r_V^3} = \frac{T_Z^2}{T_V^2} \quad \textbf{(2 boda)}$$

Slijedi da je polumjer gibanja Venere oko Sunca jednak:

$$r_V = r_Z\left(\frac{T_V}{T_Z}\right)^{2/3} \quad \textbf{(1 bod)}$$

Udaljenost „prizemljene" Zemlje na karti od Prizemljenog Sunca iznosi 9.2 cm, a s obzirom da su udaljenosti umanjene za isti faktor, slijedi da je „prizemljena" Venera na udaljenosti $9.2\,\mathrm{cm}\cdot\left(\frac{224.7}{365.26}\right)^{2/3} = 6.65\,\mathrm{cm}$ od Prizemljenog Sunca, što odgovara položaju B. **(1 bod)**

Na sličan način možemo izračunati period Merkura:

$$T_M = T_Z\left(\frac{r_M}{r_Z}\right)^{3/2} = 365.26\,\mathrm{dana}\cdot\left(\frac{3.55}{9.2}\right)^{3/2} = 87.6\,\mathrm{dana}. \quad \textbf{(1 bod)}$$

Masa „prizemljene" Zemlje je jednaka:

$$m_Z' = \rho_Z' V = \rho_Z' \frac{4}{3} r_Z'^3 \pi = 24.1\,\mathrm{g} \quad \textbf{(1 bod)}$$

Slijedi:

$$k_3 = \frac{m_Z}{m_Z'} = 2.475\cdot 10^{26} \quad \textbf{(1 bod)}$$

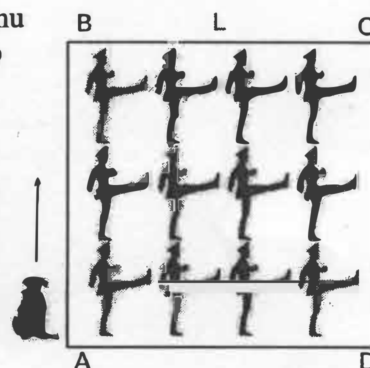
$$k_3 = \frac{m_S}{m_S'} \Rightarrow m_S' = \frac{m_S}{k_3}$$

$$\rho_S' \frac{4}{3} r_S'^3 \pi = \frac{m_S}{k_3} \Rightarrow \rho_S' = \frac{3}{4r_S'^3\pi}\frac{m_S}{k_3} = 1919\,\mathrm{kg/m^3} \quad \textbf{(2 boda)}$$

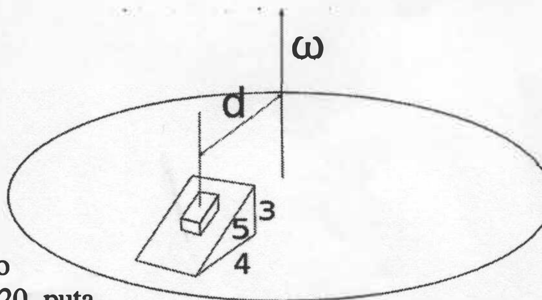
S obzirom da je Prizemljeno Sunce izrađeno od bronce, čije je gustoća 8000 – 9000 kg/m^3, mase planeta nisu umanjene za isti faktor.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE
Stubičke toplice, 5.-8.5.2014.
Srednje škole – 1. skupina

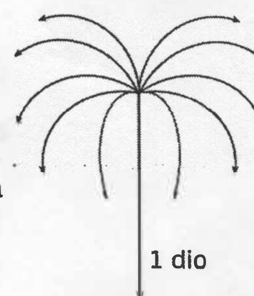
1. **(17 bodova)** Četa vojnika postavljena je u kvadratnu formaciju duljine stranice L=4m. Četa maršira udesno stalnom brzinom v=3m/s. Maskota čete je pas koji se u početnom trenutku nalazi u točki A (jednom od vrhova) i koji trči oko čete u smjeru kazaljke na satu tako da im je u svakom trenutku čim bliže (uz nogu). Pas trči stalnom brzinom, koja je 5/3 puta veća od brzine hoda čete. I pas i četa krenu se gibati u istom trenu. Nakon koliko vremena se pas nalazi u točkama B, C, D i natrag u A (vrhovima kvadrata)? Gdje se točno nalazi pas kad četa prevali udaljenost L? Pretpostavite da su promjene smjera brzine psa trenutne.



2. **(17 bodova)** Tijelo se nalazi na kosini s omjerom stranicama 3,4 i 5, kao na slici. Dimenzije tijela zanemarive su u odnosu na ostale dimenzije u sustavu. Kosina je pričvršćena na disk koji rotira stalnom kutnom brzinom. Udaljenost centra tijela od osi rotacije je d=370/999 m. Kolika mora biti kutna brzina rotacije kako bi se tijelo odvojilo od kosine? Pretpostavite da je kutna brzina 20 puta manja od toga. Koliki mora biti koeficijent trenja između tijela i kosine kako tijelo niz nju ne bi klizilo?



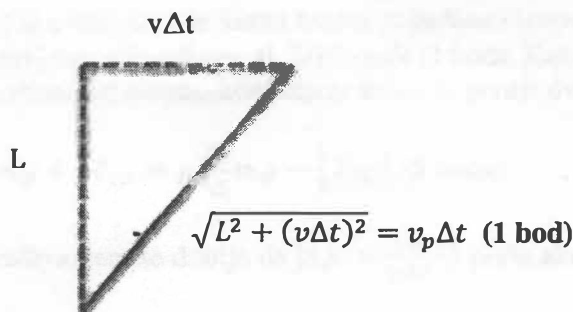
3. **(18 bodova)** Vatrometna raketa ispali se vertikalno uvis i točno na vrhu svoje putanje eksplodira u 2014 dijelova jednakih masa m. Jedan dio odleti ravno prema dolje i dođe do tla nakon vremena t_1 od eksplozije. Svi ostali dijelovi dolete na tlo istovremeno, nakon vremena t_2 od eksplozije. Na kojoj se visini desila eksplozija (izraženo samo pomoću g, t_1 i t_2)?



4. **(18 bodova)** Pretpostavite da na tijelo mase m izbačeno u vertikalnom hicu djeluje stalna sila otpora zraka F. Neka je tijelo izbačeno uvis brzinom v_0 s početne visine 0. Koju visinu dosegne tijelo? Odredite vrijeme potrebno da tijelo padne natrag s te visine na visinu 0. Zamislite dva tijela istih masa m. Jedno od njih ispaljeno je prema gore brzinom v_{01}, a drugo sekundu nakon prvog brzinom v_{02}. U kojem se trenutku tijela susretnu, ako su oba u uzlaznom dijelu svoje putanje?

RJEŠENJA

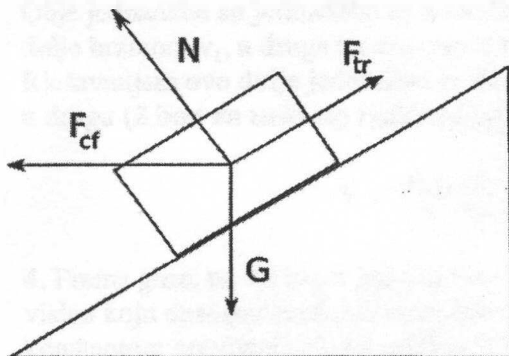
1. Kad pas ide od A do B, četa se pomakne udesno za vΔt **(1 bod)**. Pas napravi put od $v_p\Delta t$, koji je prema Pitagornu poučku jednak $\sqrt{L^2 + (v\Delta t)^2}$ (slika) **(1 bod)**. Stoga vrijedi:



Rješavanjem ove jednakosti po vremenskom intervalu, slijedi $\Delta t^{AB} = \frac{L}{\sqrt{v_p^2 - v^2}}$ **(2 boda)**. Isto vrijedi i za putanju CD **(2 boda)**. Za putanju BC relativna brzina psa u odnosu na četu je v_p-v, pa je $\Delta t^{BC} = \frac{L}{v_p - v}$ **(2 boda)**. Za putanju DA relativna brzina je v_p+v, pa je $\Delta t^{BC} = \frac{L}{v_p + v}$ **(2 boda)**. Možemo odrediti iznose ovih vremena s obzirom na to da nam je poznat L, kao i brzine psa i čete. Slijedi da je Δt^{AB} = 1s, Δt^{BC} = 2s, Δt^{CD} = 1s i Δt^{DA} = 0.5s **(1 bod)**. Stoga, pas je u točki B nakon 1s, u točki C nakon 3s, u točki D nakon 4s i natrag u točki A nakon 4.5s **(1 bod)**.

Četa prevali udaljenost od L=4m za Δt = L/v = 4/3s. To je veće od Δt^{AB}, ali manje od $\Delta t^{AB} + \Delta t^{BC}$. **(2 boda)** Dakle, u tom trenutku pas se nalazi uz gornju stranicu kvadrata. Kako se uz gornju stranicu giba ukupno 2s, a prošlo je 1/3s, pas je prevalio 1/6 gornje strane. Dakle, nalazi se na 1/6*4m = 2/3m od točke B prema C **(2 boda)**.

2. Dijagram sila na (preuveličano, radi jasnoće) tijelo dan je na slici **(1 bod)**.



Odaberimo koordinatni sustav tako da jedna os gleda u smjeru gibanja, a druga okomito na njega. Tad, uz uzimanje u obzir sličnost trokuta **(2 boda)**, vrijedi:

$$\frac{3}{5}mg + \frac{4}{5}F_{CF} = F_{tr}$$

$$\frac{4}{5}mg - \frac{3}{5}F_{CF} = N \qquad \textbf{(2 boda)}$$

a.) Tijelo se odvoji od podloge ako je N=0 **(1 bod)**. Tad iz druge jednakosti slijedi da je 4mg = $3F_{cf}$ **(1 bod)**. Kako je $F_{CF} = m\omega^2 d$, **(1 bod)** slijedi da je

$$\omega = \sqrt{\frac{4g}{3d}} = 6\, rad/s$$ **(2 boda)**

b.) U ovom slučaju kutna brzina je zadana i iznosi 1/20 kutne brzine potrebne za odvajanje od podloge, tj. 3/10 rad/s **(1 bod)**. Kako vrijedi da je $F_{tr} = \mu N$ **(1 bod)**, možemo izračunati koeficijent trenja iz gornje dvije jednadžbe. Slijedi da je:

$$\frac{3}{5}mg + \frac{4}{5}F_{CF} = \mu\left(\frac{4}{5}mg - \frac{3}{5}F_{CF}\right)$$ **(2 boda)**

Sređivanjem se dobija da je $\mu = \frac{904}{1197}$ **(3 boda ako se sredi do kraja)**.

3. Kad tijelo stane na vrhu putanje ukupna količina gibanja mu je jednaka nuli **(2 boda)**. Vrijedi zakon očuvanja količine gibanja **(2 boda)**. Uzmimo u obzir a.) da su sve mase komponenti eksplozije iste **(1 bod)** i b.) da su svi dijelovi (osim prvog) pali na tlo istovremeno. Ako su pali na tlo istovremeno, znači da su imali iste vertikalne komponente brzine **(3 boda za zaključak)**. Komad koji pada direktno prema dolje označimo brojem 1. Iz vertikalne komponente zakona očuvanja količine gibanja slijedi da je:

$$v_1 = \frac{v_2}{2013} + \frac{v_3}{2013} + \ldots + \frac{v_{2014}}{2013}$$ **(2 boda)**

s time da su sve brzine s indeksom većim od 1 istog iznosa. Ako se eksplozija desi na visini h, vrijedi da je:

$$h = v_1 t_1 + \frac{g t_1^2}{2}$$

$$h = \frac{-v_1}{2013} t_2 + \frac{g t_2^2}{2}$$ **(4 boda, 2 za svaku jednadžbu)**

Obje jednadžbe su jednadžbe za slobodni pad. Prva je za prvi komad, koji kreće prema dolje brzinom v_1, a druga za sve ostale komade, koji kreću prema gore brzinom $v_1/2013$. Rješavanjem ove dvije jednadžbe može se eliminirati v_1. Npr. izrazi se v_1 iz prve i uvrsti u drugu **(2 bod za neki tip rješavanja)**. Sređivanjem se dobije:

$$h = \frac{g t_1 t_2}{2}\left(\frac{t_1 + 2013 t_2}{2013 t_1 + t_2}\right)$$ **(2 boda)**

4. Prema gore, na tijelo po jedinici mase umjesto g djeluje g+F/m **(2 boda)**. Maksimalna visina koju dosegne možemo uzeti kao za vertikalni hitac **(1 bod)** s izmjenjenom konstantom gravitacije iz g u g+F/m. Ta je visina tad jednaka

$$h = \frac{v_0^2}{2\left(g + \frac{F}{m}\right)}$$ **(2 boda)**

Prema dolje sila otpora promijeni smjer, pa stoga možemo zamijeniti g s g-F/m **(2 boda)**. Jednadžba gibanja prema dolje tad je dana s:

$$y(t) = h_{max} - \frac{1}{2}\left(g - \frac{F}{m}\right)t^2 = \frac{v_0^2}{2\left(g+\frac{F}{m}\right)} - \frac{1}{2}\left(g - \frac{F}{m}\right)t^2$$ **(2 boda)**

Zahtijevamo da $y(t_{pad})=0$. To daje:

$$y(t_{pad}) = 0 = \frac{v_0^2}{2\left(g+\frac{F}{m}\right)} - \frac{1}{2}\left(g - \frac{F}{m}\right)t_{pad}^2$$ **(1 bod)**

s jednim fizikalnim (pozitivnim) rješenjem:

$$t_{pad} = \left|\frac{v_0}{\sqrt{g^2-\left(\frac{F}{m}\right)^2}}\right|$$ **(3 boda za konačan pozitivni izraz)**

Treći dio zadatka daje dva tijela istih masa koja se gibaju prema gore (ponovno imamo g+F/m) **(1 bod)**. Izbačena su različitim početnim brzinama, a jedno za drugim kasni jednu sekundu. Zapišimo vrijeme kašenjenja kao t', tj. $t_2=t_1-t'$. Uvjet zadatka nalaže da se tijela nalaze na istoj visini, tj. $y_1 = y_2$ **(1 bod)**. Dakle, vrijedi:

$$v_{01}t - \frac{1}{2}\left(g + \frac{F}{m}\right)t^2 = v_{02}(t - t') - \frac{1}{2}\left(g + \frac{F}{m}\right)(t - t')^2$$ **(1 bod)**

Jednadžbu treba riješiti po t. Množenjem se svi kvadratni članovi pokrate i kao rješenje se dobija:

$$t = \frac{v_{02}t' + \frac{1}{2}\left(g+\frac{F}{m}\right)t'^2}{v_{02}-v_{01}+\left(g+\frac{F}{m}\right)t'}$$ **(2 boda)**

DRŽAVNI SUSRET I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Trogir, 11. – 14. svibnja 2015.

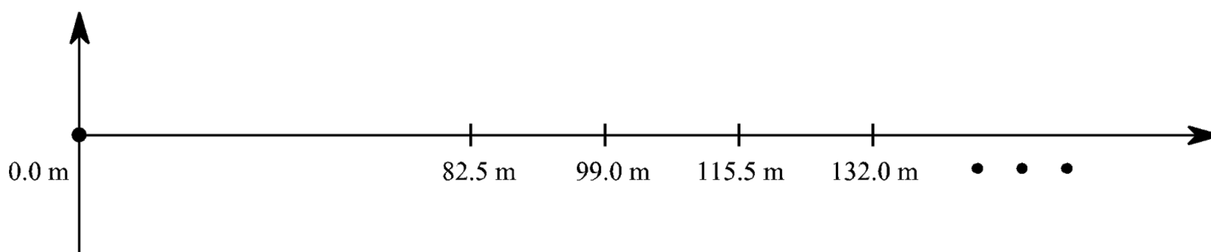
Srednje škole – 1. grupa

Zadatak 1 (17 bodova)

U ishodištu koordinatnog sustava nalazi se sirena koja svakih 1.6 s ispusti kratki zvučni signal. U početku brod miruje na udaljenosti s_0 od sirene. U trenutku, kada prvi zvučni signal dođe do broda, on se počinje udaljavati od sirene stalnom brzinom. Na slici su označeni uzastopni položaji broda u trenucima detekcije drugog, trećeg, četvrtog i petog zvučnog signala.

a) Izračunajte brzinu broda.
b) Izračunajte početnu udaljenost broda od sirene s_0.

Brzina zvuka iznosi 330 m/s.

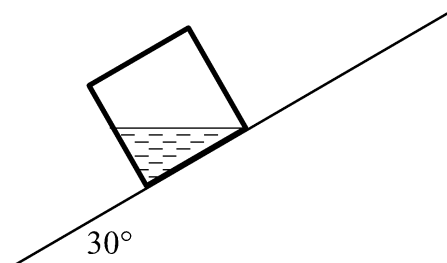


Zadatak 2 (19 bodova)

Šuplja kocka mase 1 kg, zanemarive debljine stijenke i duljine stranice a = 24 cm ispunjena je vodom do razine označene na slici. Kocka miruje na kosini nagiba 30° u odnosu na horizontalu. Koeficijent trenja između kocke i kosine iznosi 0.75. Kocku s vodom treba dovesti u položaj koji je pomaknut za a uz kosinu u odnosu na početni položaj. Izračunajte energiju koju je potrebno utrošiti,

a) ako kocku vrlo polako guramo uz kosinu i
b) ako kocku vrlo polako rotiramo oko jednog njezinog brida.

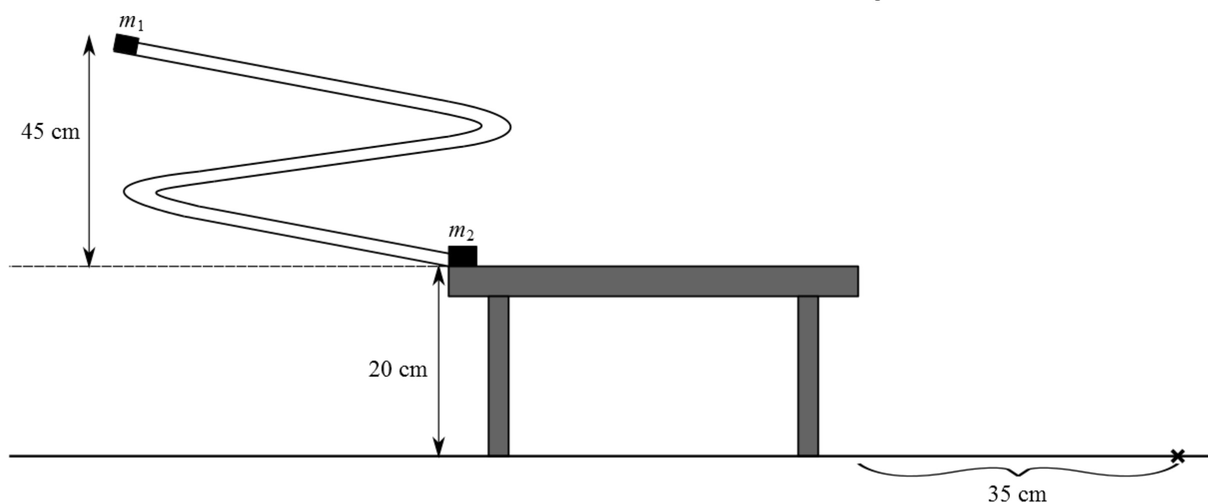
Gustoća vode je 1000 kg/m^3. Uzmite da je gravitacijsko ubrzanje g = 10 m/s^2.



Zadatak 3 (18 bodova)

Malo tijelo mase m_1 pušteno je iz mirovanja s vrha tobogana kao što je prikazano na slici. Tijelo po toboganu klizi bez trenja. Na tobogan se nastavlja horizontalni stol na čijem početku miruje tijelo mase m_2. Tijelo mase m_1 nalijeće na tijelo mase m_2 te se s njim savršeno elastično sudara. Nakon gibanja po horizontalnom stolu duljine 37.5 cm tijelo mase m_2 pada na tlo u točku udaljenu 35 cm od ruba stola. Omjer masa je m_1:m_2 = 1:2. Uzmite da je gravitacijsko ubrzanje g = 10 m/s^2. Zanemarite dimenzije tijela m_1 i m_2.

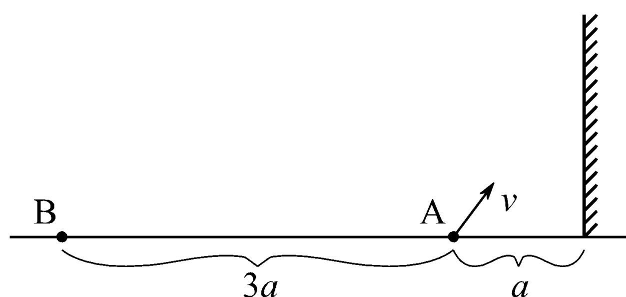
a) Postoji li na stolu trenje? Ako da, izračunajte koeficijent trenja.
b) Izračunajte na kojoj udaljenosti od ruba stola će tijelo mase m_1 pasti na tlo.



Zadatak 4 (16 bodova)

Malo tijelo izbačeno je iz točke A brzinom v prema vertikalnom zidu od kojeg se savršeno elastično odbija. Udaljenost točke A od zida je a = 2 m. Izračunajte:

a) minimalnu brzinu v takvu da tijelo padne na tlo u točki B,
b) visinu na kojoj malo tijelo udari o zid i
c) maksimalnu visinu koju malo tijelo postigne za vrijeme leta te horizontalnu udaljenost od zida u istom trenutku.



DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

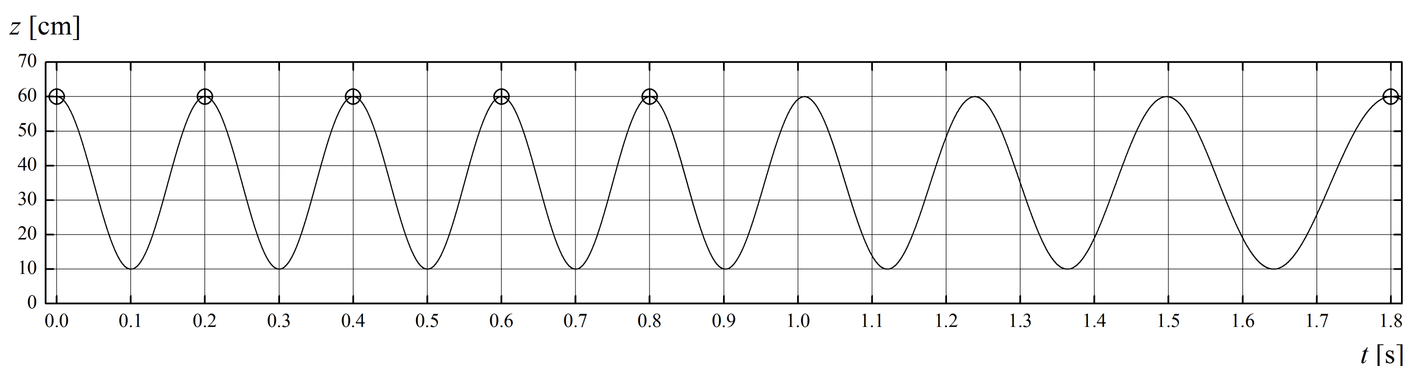
Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

Srednje škole – 1. skupina

Zadatak 1 (17 bodova)

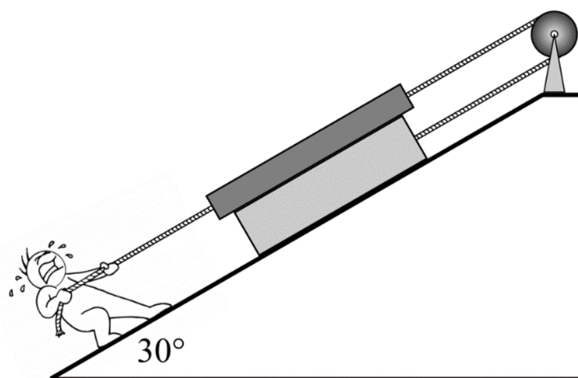
Kotač bicikla ima vanjski promjer 700 mm. Na udaljenosti 250 mm od središta kotača postavljeno je mačje oko. Biciklist vozi bicikl po ravnoj stazi najprije stalnom brzinom, a u trenutku 0.8 s počinje jednoliko usporavati. Na grafu je prikazana ovisnost visine (udaljenosti od tla) mačjeg oka o vremenu (radi jasnoće posebno je označeno da se u trenucima t = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 i 1.8 mačje oko nalazi na najvišem položaju).

a) Nacrtajte graf ovisnosti brzine bicikla o vremenu.
b) Nacrtajte graf ovisnosti položaja bicikla o vremenu.
c) Nakon koliko vremena od početka gibanja će se bicikl zaustaviti, koliki put će do tada prijeći put te koliko iznosi srednja brzina po putu bicikla od početnog trenutka do zaustavljanja?



Zadatak 2 (17 bodova)

Daska mase 1 kg nalazi se na kvadru mase 8 kg. Na dasku i kvadar pričvršćeno je nerastezljivo uže zanemarive mase koje je prebačeno preko koloture zanemarive mase. Čovjek pomoću nerastezljivog užeta zanemarive mase vuče dasku prema podnožju kosine stalnom brzinom primjenjujući stalnu silu F. Koeficijent trenja između svih podloga iznosi 0.2.



a) Nacrtajte sve sile koje djeluju na dasku.
b) Nacrtajte sve sile koje djeluju na kvadar.
c) Izračunajte iznos sile F.
d) Izračunajte rad koji je potrebno utrošiti da se kvadar pomakne uz kosinu za 10 cm.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

Zadatak 3 (18 bodova)

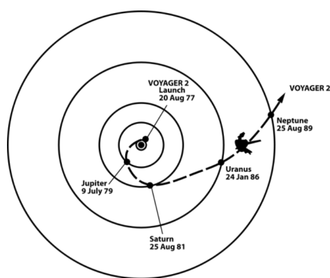
Atletičar se natječe u disciplini bacanja koplja. Položaj koplja opisan je položajem njegovog vrha. U trenutku izbačaja vrh koplja nalazi se na visini y_0. Zanemarite otpor zraka.

a) Ako atletičar miruje za vrijeme izbačaja koplja, koplje padne na tlo na udaljenosti 35.2 m od mjesta izbačaja, a let koplja traje 2.75 s. Brzina koplja u trenutku izbačaja zatvara kut 45° s horizontalom. Izračunajte brzinu koplja neposredno nakon izbačaja.

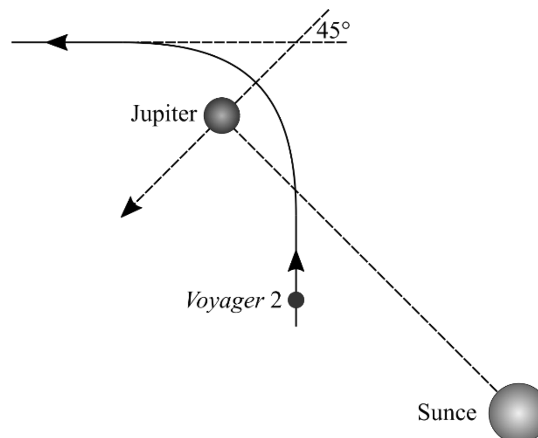
b) Da poveća domet koplja atletičar koristiti zaletište. Atletičar jednoliko ubrzava na zaletištu dugom 32 m te izbacuje koplje pod jednakim kutem u svom referentnom sustavu i s jednake visine kao i u prethodnom slučaju. Ako se domet koplja poveća za 25% u odnosu na prethodni slučaj, a vrijeme leta ostane jednako, izračunajte brzinu atletičara u trenutku izbačaja koplja. Izračunajte brzinu koplja u trenutku izbačaja u referentnom sustavu atletskog stadiona. Izračunajte ubrzanje atletičara na zaletištu.

c) Izračunajte visinu vrha koplja y_0 u trenutku izbačaja. Izračunajte maksimalnu visinu (udaljenost od tla) koju postiže vrh koplja za vrijeme leta u oba slučaja.

Zadatak 4 (18 bodova)



Prilikom planiranja putanja svemirskih letjelica često se koristi „efekt praćke“ (engl. *sligshot effect*) koji se javlja prilikom prolaska letjelice blizu nekog od planeta u Sunčevom sustavu. Razmotrit ćemo ovaj efekt na primjeru svemirske sonde Voyager 2. Svemirsku sondu Voyager 2 lansirala je *National Aeronautics and Space Administration*, USA (NASA) 20. kolovoza 1977. Misija Voyagera 2 je istraživanje vanjskih planeta Sunčevog sustava: Jupitera, Saturna, Urana i Neptuna. Putanja Voyagera 2 obzirom na referentni sustav Sunca prikazana je na slici lijevo.



Promatrano iz referentnog sustava Jupitera (sustav u kojem Jupiter miruje) dio putanje Voyagera 2 prikazan je na slici desno. Obzirom na referentni sustav Jupitera na velikim udaljenostima od Jupitera brzina Voyagera 2 iznosi 7.8 km/s, a smjer brzine promijeni se za 90° nakon prolaska pored Jupitera. Brzina Jupitera u odnosu na Sunce iznosi 13.1 km/s.

a) Izračunajte promjenu iznosa brzine Voyagera 2 u sustavu Sunca prije i nakon prolaska pored Jupitera. Skicirajte vektore brzina Voyagera 2 prije i nakon prolaska pored Jupitera u sustavu Sunca. Pretpostavite da se Jupiter, za vrijeme prolaska Voyagera 2 pored Jupitera, giba po pravcu i zanemarite utjecaj Sunca i drugih planeta. Pokažite da je promjena brzine Jupitera zanemariva.

b) Pretpostavite da se nakon prolaska pored Jupitera i dovoljno daleko od njegovog gravitacijskog utjecaja, Voyager 2 nalazi na udaljenosti od Sunca približno jednakoj udaljenosti Sunce-Jupiter. Je li brzina Voyagera 2 dovoljna da napusti Sunčev sustav?

c) Prilikom prolaska pored Jupitera najmanja udaljenost Voyagera 2 od površine Jupitera iznosi 570 000 km. Izračunajte maksimalnu brzinu Voyagera 2 u referentnom sustavu Jupitera, koju postiže za vrijeme prolaska pored Jupitera.

Masa Sunca: $1.989 \cdot 10^{30}$ kg, masa Jupitera: $1.898 \cdot 10^{27}$ kg, masa Voyagera 2: 722 kg, udaljenost Sunce-Jupiter: $778.5 \cdot 10^{6}$ km, polumjer Jupitera: 70 000 km, gravitacijska konstanta: $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ Nm^2/kg^2

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

Srednje škole – 1. skupina, rješenja i smjernice za bodovanje

Zadatak 1 (17 bodova)

a) S priloženog grafa se može vidjeti da kotač bicikla u vremenskom intervalu $\Delta t_1 = 0 - 0.8\,\text{s}$ napravi četiri puna okreta. Prema tome, kutna brzina okretanja kotača jednaka je:

$$\omega_0 = \frac{\Delta\theta}{\Delta t_1} = \frac{4\cdot 2\pi}{0.8\,\text{s}} = 10\pi\ \text{rad/s}$$ **(2 boda)**

U vremenskom intervalu $\Delta t_2 = 0.8 - 1.8\,\text{s}$ kotač se giba jednoliko usporeno s početnom kutnom brzinom ω_0 i kutnim ubrzanjem α te u tom vremenu napravi četiri puna okreta.

$$\Delta\theta = \omega_0\Delta t_2 - \frac{1}{2}\alpha(\Delta t_2)^2$$

$$4\cdot 2\pi = (10\pi\ \text{rad/s})(1\,\text{s}) - \frac{1}{2}\alpha(1\,\text{s})^2 \ \Rightarrow\ \alpha = \frac{20\pi - 16\pi}{(1\,\text{s})^2} = 4\pi\ \text{rad/s}^2$$ **(3 boda)**

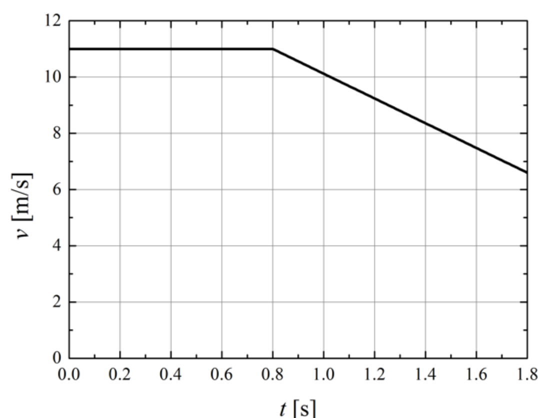
Brzina translacije bicikla jednaka je obodnoj brzini točke na vanjskom rubu kotača bicikla. Prema tome, u vremenskom intervalu Δt_1 bicikl se giba jednoliko brzinom:

$$v_0 = r\omega_0 = (0.35\,\text{m})(10\pi\ \text{rad/s}) = 11\,\text{m/s}$$

U vremenskom intervalu Δt_2 bicikl se giba jednoliko usporeno ubrzanjem:

$$a = r\alpha = (0.35\,\text{m})(4\pi\ \text{rad/s}^2) = 4.4\,\text{m/s}^2$$

te je gibanje opisano jednadžbom $v(t) = v_0 - at$. $v(t)$ graf prikazan je na slici desno. **(4 boda)**



b) U vremenskom intervalu Δt_1 bicikl prijeđe put:

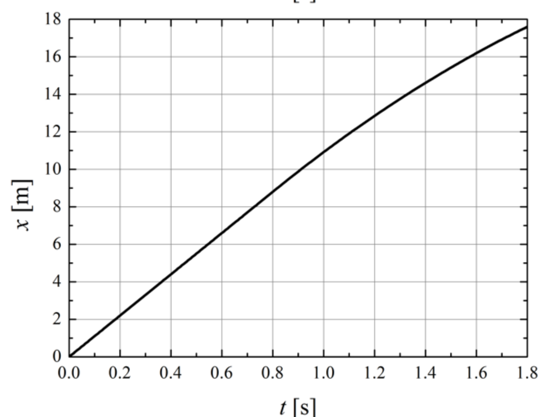
$$s_1 = v_0\Delta t_1 = (11\,\text{m/s})(0.8\,\text{s}) = 8.8\,\text{m}$$

U vremenskom intervalu Δt_2 bicikl prijeđe put:

$$s_2 = v_0\Delta t_2 - \frac{1}{2}a(\Delta t_2)^2$$

$$s_2 = (11\,\text{m/s})(1\,\text{s}) - \frac{1}{2}(4.4\,\text{m/s}^2)(1\,\text{s})^2 = 8.8\,\text{m}$$

Na kraju vremenskog intervala Δt_2 bicikl se nalazi na položaju $s_1 + s_2 = 17.6\,\text{m}$. $x(t)$ graf prikazan je na slici desno. **(4 boda)**



c) Bicikl će se zaustaviti u trenutku:

$$0 = v_0 - at \ \Rightarrow\ t = \frac{v_0}{a} = \frac{11\,\text{m/s}}{4.4\,\text{m/s}^2} = 2.5\,\text{s}$$ nakon početka usporenog gibanja. **(1 bod)**

Do tada će prijeći put:

$$s_{ukupno} = s_1 + v_0 t - \frac{1}{2}at^2 = 8.8\,\text{m} + (11\,\text{m/s})(2.5\,\text{s}) - \frac{1}{2}(4.4\,\text{m/s}^2)(2.5\,\text{s})^2 = 22.55\,\text{m}$$ **(2 boda)**

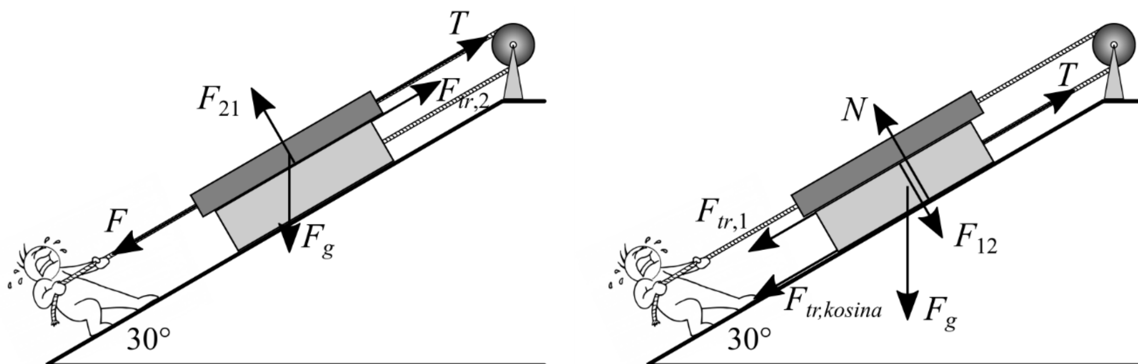
Srednja brzina po putu jednaka je:

$$\bar{v} = \frac{s_{ukupno}}{t_{ukupno}} = \frac{22.55\,\text{m}}{0.8\,\text{s} + 2.5\,\text{s}} = 6.83\,\text{m/s}$$ **(1 bod)**

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

Zadatak 2 (17 bodova)



a) Točno nacrtan dijagram sila na dasku: **(2 boda)**
b) Točno nacrtan dijagram sila na kvadar: **(2 boda)**
c) S obzirom da se sustav giba stalnom brzinom zbroj svih sila, koje djeluju na svako pojedino tijelo, jednak je nuli. **(1 bod)** 2. Newtonov zakon za dasku u smjeru paralelno, odnosno okomito na kosinu glasi:

$$0 = T + F_{tr,2} - F - \frac{1}{2}m_1 g\,,\ 0 = F_{21} - \frac{\sqrt{3}}{2}m_1 g$$ **(2 boda)**

2. Newtonov zakon za kvadar u smjeru paralelno, odnosno okomito na kosinu glasi:

$$0 = T - F_{tr,1} - F_{tr,\text{kosina}} - \frac{1}{2}m_2 g\,,\ 0 = N - F_{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}m_2 g$$ **(2 boda)**

Vrijede sljedeće relacije:

$$F_{12} = F_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2}m_1 g$$ **(1 bod)**

$$F_{tr,1} = F_{tr,2} = \mu F_{12} = \mu\frac{\sqrt{3}}{2}m_1 g$$ **(1 bod)**

$$F_{tr,\text{kosina}} = \mu N = \mu\left(F_{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}m_2 g\right) = \mu\frac{\sqrt{3}}{2}(m_1 + m_2)g$$ **(1 bod)**

Uvrštavanjem za silu F se dobije:

$$0 = F - 2F_{tr,1} - F_{tr,\text{kosina}} + \frac{1}{2}m_1 g - \frac{1}{2}m_2 g$$

$$F = 2F_{tr,1} + F_{tr,\text{kosina}} + \frac{1}{2}(m_2 - m_1)g$$

$$F = \frac{1}{2}\left[\mu\sqrt{3}(3m_1 + m_2) + m_2 - m_1\right]g$$

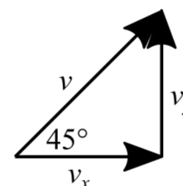
$$F = \frac{1}{2}\left[0.2\sqrt{3}(11\text{ kg}) + (7\text{ kg})\right]\left(9.81\text{ m/s}^2\right) = 53\text{ N}$$ **(3 boda)**

d) Rad, koji čovjek izvrši, jednak je:
$W = Fs = 5.3\text{ J}$ **(2 boda)**

DRŽAVNO NATJECANJE IZ FIZIKE

Brodarica, 25.-28. travnja 2016.

Zadatak 3 (18 bodova)



a) Brzinu koplja u trenutku izbačaja, v, možemo rastaviti na horizontalnu (v_x) i vertikalnu komponentu (v_y):

$v_x = v_x = \frac{\sqrt{2}}{2} v$ **(1 bod)**

Domet koplja određen je horizontalnom komponentom brzine:

$d = v_x t_{let} \Rightarrow v_x = \frac{d}{t_{let}} = \frac{35.2\,\text{m}}{2.75\,\text{s}} = 12.8\,\text{m/s}$ **(2 boda)**

Brzina koplja u trenutku izbačaja jednaka je: $v = \sqrt{2} v_x = 18.1\,\text{m/s}$ **(1 bod)**

b) Budući da je vrijeme leta koplja jednako kao u prethodnom slučaju, vertikalna komponenta brzine je također jednaka. **(1 bod)**. S obzirom da je kut izbačaja u referentnom sustavu atletičara jednak, brzina koplja u referentnom sustavu atletičara je jednaka (18.1 m/s). **(1 bod)** Horizontalna komponenta brzine u odnosu na atletski stadion jednaka je zbroju horizontalne komponente brzine u sustavu atletičara i brzine atletičara v_a:

$v'_x = v_x + v_a$ **(1 bod)**

Domet koplja jednak je:

$d' = v'_x t_{let} \Rightarrow v'_x = \frac{d'}{t_{let}} = \frac{1.25d}{t_{let}} = \frac{44\,\text{m}}{2.75\,\text{s}} = 16\,\text{m/s}$ **(1 bod)**

Prema tome, brzina atletičara u trenutku izbačaja koplja jednaka je:

$v_a = v'_x - v_x = 3.2\,\text{m/s}$ **(1 bod)**

Brzina koplja u trenutku izbačaja u sustavu atletskog stadiona jednaka je:

$v = \sqrt{v'^2_x + v_y^2} = 20.5\,\text{m/s}$ **(1 bod)**

Ubrzanje atletičara na zaletištu jednako je:

$s = \frac{v_a^2}{2a} \Rightarrow a = \frac{v_a^2}{2s} = \frac{(3.2\,\text{m/s})^2}{2(32\,\text{m})} = 0.16\,\text{m/s}^2$ **(2 boda)**

c) Visinu y_0 izračunamo iz jednadžbe:

$y(t_{pad}) = 0 = y_0 + v_{y0} t_{pad} - \frac{1}{2} g t_{pad}^2 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2} g t_{pad}^2 - v_{y0} t_{pad} = 1.89\,\text{m}$ **(2 boda)**

Maksimalna visina, koju postiže koplje, jednaka je u oba slučaja jer je i vertikalna komponenta brzine jednaka u oba slučaja. Za gibanje u vertikalnom smjeru vrijedi:

$y(t) = y_0 + v_{y0} t - \frac{1}{2} g t^2,\ v_y(t) = v_{y0} - gt$ **(2 boda)**

U najvišoj točki putanje vertikalna komponenta brzine jednaka je nuli:

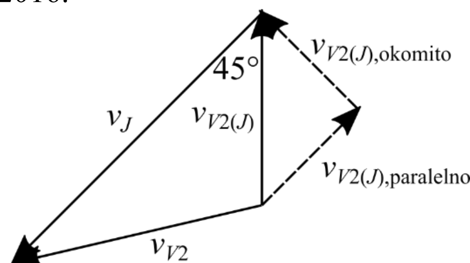
$0 = v_{y0} - gt \Rightarrow t = \frac{v_{y0}}{g}$ **(1 bod)**

$y_{max} = y_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g} = 10.25\,\text{m}$ **(1 bod)**

Zadatak 4 (18 bodova)

a) Brzina Voyagera 2 u referentnom sustavu Sunca prije prolaska pored Jupitera jednaka je vektorskom zbroju brzine Voyagera 2 u sustavu Jupitera i brzine Jupitera, kao što je prikazano

na slici (skica: **1 bod**). Brzinu Voyagera 2 u sustavu Jupitera $v_{V2(J)}$ možemo rastaviti na komponentu paralelnu brzini Jupitera i komponentu okomitu na brzinu Jupitera koje redom iznose:



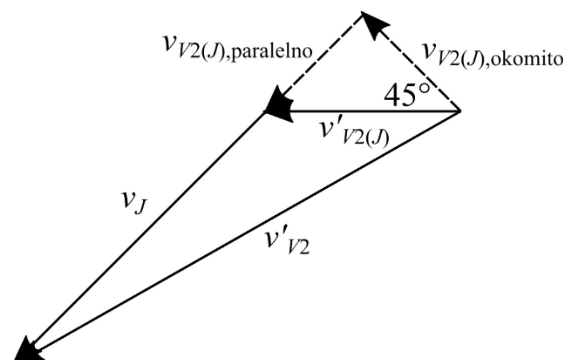
$$v_{V2(J),\parallel} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{V2(J)} = 5.5\,\text{km/s}$$

$$v_{V2(J),\perp} = \frac{\sqrt{2}}{2} v_{V2(J)} = 5.5\,\text{km/s}$$ **(1 bod)**

Slijedi da je brzina Voyagera 2 u referentnom sustavu Sunca prije prolaska pored Jupitera jednaka:

$$v_{V2} = \sqrt{\left(v_J - v_{V2(J),\parallel}\right)^2 + v_{V2(J),\perp}^2} = 9.4\,\text{km/s}$$ **(2 boda)**

Analogno se može napraviti za brzinu Voyagera 2 nakon prolaska pored Jupitera (skica vektora brzina: **1 bod**). Slijedi da je brzina Voyagera 2 u referentnom sustavu Sunca nakon prolaska pored Jupitera jednaka:



$$v'_{V2} = \sqrt{\left(v_J + v'_{V2(J),\parallel}\right)^2 + v'^2_{V2(J),\perp}} = 19.4\,\text{km/s}$$

(2 boda)

Prema tome, prilikom prolaska Voyagera 2 pored Jupitera, njegova brzina obzirom na Sunce se poveća za: $\Delta v_{V2} = v'_{V2} - v_{V2} = 10\,\text{km/s}$ **(1 bod)**

Za prolazak Voyagera 2 pored Jupitera vrijedi zakon očuvanja količine gibanja:

$$m_{V2}\vec{v}_{V2} + m_J\vec{v}_J = m_{V2}\vec{v}'_{V2} + m_J\vec{v}'_J$$ **(1 boda)**

Promjena brzine Jupitera jednaka je: $\Delta\vec{v}_J = \vec{v}'_J - \vec{v}_J = \frac{m_{V2}}{m_J}\left(\vec{v}_{V2} - \vec{v}'_{V2}\right)$ **(1 bod)**

Omjer masa Jupitera i Voyagera 2 jednak je:

$\frac{m_{V2}}{m_J} = \frac{722}{1.898\cdot 10^{27}} = 3.8\cdot 10^{-25}$, što znači da je $\Delta\vec{v}_J \cong 0$ **(1 bod)**

b) Ukupna energija Voyagera 2 na udaljenosti od Sunca jednakoj udaljenosti Sunce-Jupiter je:

$$E = \frac{1}{2}m_{V2}v'^2_{V2} - G\frac{m_{V2}m_S}{r_{S-J}}$$ **(1 bod)**

Uvjet da Voyager 2 izađe iz gravitacijskog polja Sunca je $E \geq 0$ **(1 bod)**. Slijedi:

$$v'_{V2} \geq \sqrt{\frac{2Gm_S}{r_{S-J}}} \Rightarrow 19.4\,\text{km/s} \geq 18.5\,\text{km/s}$$

Relacija je zadovoljena te Voyager 2 ima dovoljnu brzinu da izađe iz Sunčevog sustava. **(1 bod)**

c) Maksimalnu brzinu Voyager 2 ima u trenutku kada se nalazi najbliže Jupiteru. Ovu brzinu možemo izračunati iz zakona očuvanja energije:

$$\frac{1}{2}m_{V2}v_{V2(J)}^2 - G\frac{m_{V2}m_J}{r_{daleko}} = \frac{1}{2}m_{V2}v_{V2(J),\max}^2 - G\frac{m_{V2}m_J}{r_{\min}}$$ **(2 boda)**

Uzimajući u obzir da je $G\frac{m_{V2}m_J}{r_{daleko}} = 0$ i da je $r_{\min} = r_J + d = 640000\,\text{km}$ slijedi:

$$v_{V2(J),\max} = \sqrt{v_{V2(J)}^2 + \frac{2Gm_J}{r_{\min}}} = 21.4\,\text{km/s}$$ **(2 boda)**

DRŽAVNI SUSRET I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA

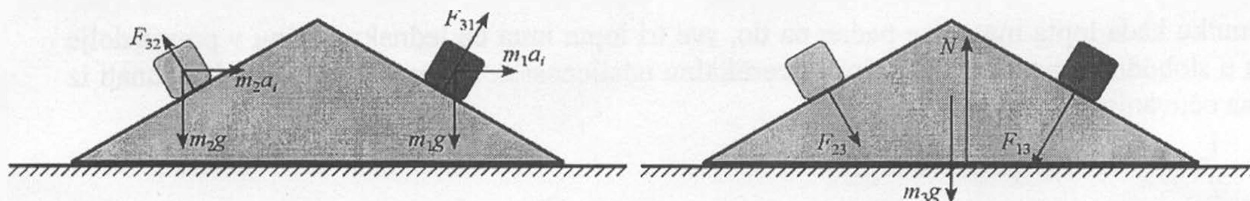
Vinkovci, 2. – 5. svibnja 2017.

Rješenja i smjernice za bodovanje

Srednje škole – 1. grupa

Zadatak 1 (17 bodova)

Pretpostavimo da će se kosina (tijelo mase m_3) gibati prema lijevo. Dijagrami sila na sva tri tijela prikazani su na sljedećim slikama pri čemu su dijagrami sila na tijela m_1 i m_2 nacrtani su u sustavu kosine, a dijagram sila na kosinu nacrtan je obzirom na tlo **(3 boda)**:



Drugi Newtonov zakon za tijelo mase m_1 za smjer paralelno kosini (pozitivan smjer je smjer niz kosinu) i smjer okomito na kosinu glasi:

$$m_1 a_1 = \frac{1}{2} m_1 g + \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 a_i, \quad 0 = F_{31} + \frac{1}{2} m_1 a_i - \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g, \text{ (2 boda)}$$

gdje je a_1 ubrzanje tijela mase m_1 u odnosu na kosinu i a_i inercijalno ubrzanje jednako ubrzanju kosine a. Drugi Newtonov zakon za tijelo mase m_2 za smjer paralelno kosini (pozitivan smjer je smjer niz kosinu) i smjer okomito na kosinu glasi:

$$m_2 a_2 = \frac{1}{2} m_2 g - \frac{\sqrt{3}}{2} m_2 a_i, \quad 0 = F_{32} - \frac{1}{2} m_2 a_i - \frac{\sqrt{3}}{2} m_2 g, \text{ (2 boda)}$$

gdje je a_2 ubrzanje tijela mase m_2 u odnosu na kosinu. Drugi Newtonov zakon za tijelo mase m_3 za smjer paralelno podlozi i okomito na podlogu glasi:

$$m_3 a = \frac{1}{2} F_{13} - \frac{1}{2} F_{23}, \quad 0 = N - m_3 g - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{13} - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{23}, \text{ (1 bod)}$$

Prema trećem Newtonovom zakonu vrijedi:

$F_{31} = F_{13}$ i $F_{32} = F_{23}$ **(1 bod)**

Iz druge jednadžbe slijedi:

$$F_{31} = \frac{\sqrt{3}}{2} m_1 g - \frac{1}{2} m_1 a_i$$

Iz četvrte jednadžbe slijedi:

$$F_{32} = \frac{\sqrt{3}}{2} m_2 g + \frac{1}{2} m_2 a_i$$

Uvrštavanjem u jednadžbu za kosinu dobije se:

$$m_3 a = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3} m_1 g - m_1 a - \sqrt{3} m_2 g - m_2 a\right)$$

$$(m_1 + m_2 + 4m_3) a = \sqrt{3}(m_1 - m_2) g \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{3}(m_1 - m_2) g}{m_1 + m_2 + 4m_3} = \frac{g}{\sqrt{3}} = 5.66 \text{ m/s}^2 \text{ (3 boda)}$$

Ubrzanje tijela mase m_1 obzirom na kosinu jednako je:

$$a_1 = \frac{1}{2} g + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{g}{\sqrt{3}} = g = 9.81 \text{ m/s}^2 \text{ (1 bod)}$$

Ubrzanje tijela mase m_2 obzirom na kosinu jednako je:

$$a_2 = \frac{1}{2}g - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{g}{\sqrt{3}} = 0 \text{ (1 bod)}$$

Kosina se nakon 0.5 s gibanja pomaknula $s_3 = \frac{1}{2}at^2 = 0.708\,\text{m}$ prema lijevo. **(1 bod)**

Tijelo mase m_1 se nakon 0.5 s gibanja pomaknulo za $s_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 = 1.226\,\text{m}$ niz kosinu. **(1 bod)**

Tijelo mase m_2 se nakon 0.5 s gibanja nije pomaknulo u odnosu na kosinu budući da je njegovo ubrzanje u sustavu kosine $a_2 = 0$. **(1 bod)**

Zadatak 2 (17 bodova)

U trenutku kada lopta mase $6m$ padne na tlo, sve tri lopte imat će jednaku brzinu v prema dolje jer su u slobodnom padu prešle jednaku vertikalnu udaljenost h. Tu brzinu možemo izračunati iz zakona očuvanja energije:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \text{ (2 boda)}$$

Neposredno nakon elastičnog sudara lopte mase $6m$ s tlom, ona ima brzinu v prema gore te se sudara s loptom mase $2m$ koja ima brzinu v prema dolje. Za taj sudar možemo napisati zakon očuvanja količine gibanja i zakon očuvanja energije (definiramo pozitivan smjer brzine prema gore):

$$6mv - 2mv = 6mv_1' + 2mv_2' \text{ (2 boda)}$$

$$\frac{1}{2}6mv^2 + \frac{1}{2}2mv^2 = \frac{1}{2}6mv_1'^2 + \frac{1}{2}2mv_2'^2 \text{ (2 boda)}$$

gdje su v_1' i v_2' brzina prve, odnosno druge lopte neposredno nakon sudara. Nakon sređivanja dobivamo sustav jednadžbi:

$$2v = 3v_1' + v_2'$$

$$4v^2 = 3v_1'^2 + v_2'^2$$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$v_2' = 2v - 3v_1'$$

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo:

$$4v^2 = 3v_1'^2 + 4v^2 - 12vv_1' + 9v_1'^2$$

$$0 = v_1'^2 - vv_1'$$

$$0 = v_1'(v_1' - v) \Rightarrow v_{1,1}' = 0, v_{2,1}' = 2v; v_{1,2}' = v, v_{2,2}' = -v$$

Fizikalno prihvatljivo rješenje je:

$$v_1' = 0, v_2' = 2v \text{ (4 boda)}$$

Prema tome, neposredno nakon sudara lopte mase $6m$ i lopte mase $2m$, lopta mase $6m$ miruje, a lopta mase $2m$ ima brzinu $2v$ prema gore. Lopta mase $2m$ se zatim sudara s loptom mase m koja neposredno prije sudara ima brzinu v prema dolje. Zakon očuvanja količine gibanja i energije za ovaj sudar su:

$$2m2v - mv = 2mv_2'' + mv_3'' \text{ (1 bod)}$$

$$\frac{1}{2}2m(2v)^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2mv_2''^2 + \frac{1}{2}mv_3''^2 \text{ (1 bod)}$$

gdje su v_2'' i v_3'' brzina druge, odnosno treće lopte neposredno nakon sudara. Nakon sređivanja dobivamo sustav jednadžbi:

$$3v = 2v_2'' + v_3''$$

$9v^2 = 2v_2''^2 + v_3''^2$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$v_3'' = 3v - 2v_2''$

Uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo:

$9v^2 = 2v_2''^2 + 9v^2 - 12vv_2'' + 4v_2''^2$

$0 = v_2''^2 - 2vv_2''$

$0 = v_2''(v_2'' - 2v) \Rightarrow v_{2,1}'' = 0, v_{3,1}'' = 3v; v_{2,2}'' = 2v, v_{3,2}'' = -v$

Fizikalno prihvatljivo rješenje je:

$v_2'' = 0, v_3'' = 3v$ **(2 boda)**

Prema tome, neposredno nakon sudara lopte mase $2m$ i lopte mase m, lopta mase $2m$ miruje, a lopta mase m ima brzinu $3v$ prema gore. Maksimalna visina, koju će postići lopta mase m u odnosu na visinu na kojoj se nalazi neposredno nakon sudara s loptom mase $2m$, iznosi:

$mgh_{max} = \frac{1}{2}m(3v)^2 \Rightarrow h_{max} = \frac{9}{2}\frac{v^2}{g} = 9h$ **(2 boda)**

U odnosu na početnu visinu lopte mase m, maksimalna visina je: $9h - h = 8h$. **(1 bod)**

Zadatak 3 (18 bodova)

Brzinu utega u trenutku napuštanja platforme možemo izračunati iz zakona očuvanja energije:

$\frac{1}{2}k(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ **(2 boda)**

Uzimamo u obzir da je $\Delta l = l/2$ i $h = l/4$:

$\frac{1}{8}kl^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}mgl$

$kl^2 = 4mv^2 + 2mgl \Rightarrow v = \sqrt{\frac{kl^2}{4m} - \frac{gl}{2}} = 10\,\text{m/s}$ **(2 boda)**

Mjesto pada utega na tlo odredimo iz jednadžbi za ovisnost x i y koordinate utega o vremenu:

$x(t) = \frac{\sqrt{3}v}{2}t$ **(1 bod)**

$y(t) = H + \frac{v}{2}t - \frac{1}{2}gt^2$ **(1 bod)**

gdje je $H = h_{tunel} + l/2 = 10$ m.

U trenutku pada utega na tlo t' vrijedi $y(t') = 0$, uvrštavanjem se dobije:

$0 = H + \frac{v}{2}t' - \frac{1}{2}gt'^2$

$0 = 10 + 5t' - 5t'^2$

$t'^2 - t' - 2 = 0$

$(t' - 2)(t' + 1) = 0 \Rightarrow t' = 2\,\text{s}, t' = -1\,\text{s}$ **(2 boda)**

Fizikalno prihvatljivo rješenje za vrijeme pada utega na tlo je $t' = 2$ s **(1 bod)**. U tom trenutku horizontalna udaljenost utega od izlaza iz tunela jednaka je:

$x(t') = \frac{\sqrt{3}v}{2}t' = 17.3\,\text{m}$ **(1 bod)**

Maksimalnu visinu utega u odnosu na tlo izračunamo iz uvjeta da je y komponenta brzine utega na maksimalnoj visini jednaka nuli:

$$v_y(t) = \frac{v}{2} - gt$$

$$0 = \frac{v}{2} - gt'' \Rightarrow t'' = \frac{v}{2g} = 0.5\,\mathrm{s}$$ **(1 bod)**

Maksimalna visina utega iznosi:

$$y_{\max} = y(t'') = H + \frac{v}{2}t'' - \frac{1}{2}gt''^2 = 10\,\mathrm{m} + 5\,\mathrm{m/s}\cdot 0.5\,\mathrm{s} - 5\cdot(0.5\,\mathrm{s})^2 = 11.25\,\mathrm{m}$$ **(1 bod)**

Od ulaza u tunel do pada utega na tlo Ptica Trkačica će prijeći put:

$$s_{PT} = v_{PT}(t' - t'') = 32\,\mathrm{km/h}\frac{1000}{3600}\cdot 1.5\,\mathrm{s} = 13.3\,\mathrm{m}$$ **(2 boda)**

Što znači da se u trenutku pada utega na tlo Ptica Trkačica nalazi 13.3 m – 6 m = 7.3 m od izlaza iz tunela te ju uteg neće pogoditi. **(1 bod)**

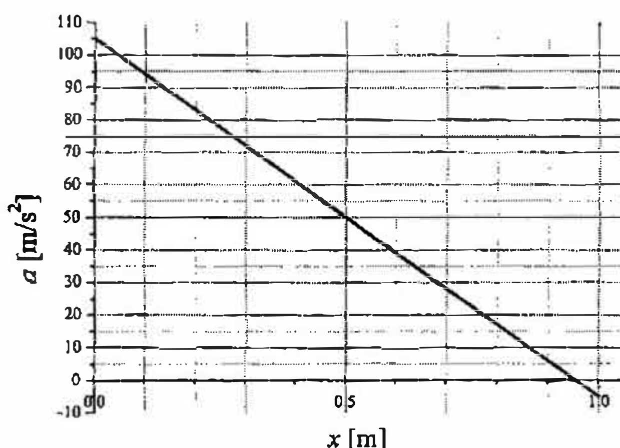
Ubrzanje utega na platformi odredimo iz drugog Newtonovog zakona:

$$ma = k\Delta l - \frac{1}{2}mg$$ **(1 bod)**

Ako ishodište x osi definiramo na početnom položaju utega i pozitivan smjer prema gore, tada je Δl jednako $l' - x$, gdje je $l' = 1$ m. Ovisnost ubrzanja utega o položaju na platformi tada je oblika:

$$a = \frac{k(l' - x)}{m} - \frac{1}{2}g = 105\,\mathrm{m/s^2} - 110\,\mathrm{s^{-2}}\cdot x$$ **(1 bod)**

Graf $a(x)$: **(1 bod)**



Zadatak 4 (18 bodova)

Polumjer kružne putanje Marsa možemo izračunati koristeći 3. Keplerov zakon:

$$\left(\frac{T_{Zemlja}}{T_{Mars}}\right)^2 = \left(\frac{r_{Zemlja}}{r_{Mars}}\right)^3 \Rightarrow r_{Mars} = r_{Zemlja}\left(\frac{T_{Mars}}{T_{Zemlja}}\right)^{2/3} = 227.9\cdot 10^6\,\mathrm{km}$$ **(2 boda)**

Alternativno, do istog izraza se može doći, ako ustanovimo da i za gibanje Zemlje i za gibanje Marsa vrijedi $\frac{mv^2}{r} = \frac{Gmm_{Sunce}}{r^2}$, gdje je $v = \frac{2\pi r}{T}$.

Iz skice se može zaključiti da je velika poluos elipse a, po kojoj se giba raketa, jednaka:

$$a = \frac{r_{Zemlja} + r_{Mars}}{2} = 188.8\cdot 10^6\,\mathrm{km}$$ **(2 boda)**

Vrijeme putovanja rekete izračunamo koristeći 3. Keplerov zakon:

Za vrijeme leta rekete Mars će se pomaknuti za kut:

$$\alpha_{Mars} = \omega_{Mars} t = \frac{2\pi}{T_{Mars}} t = 2.367\ \text{rad} = 135.6°$$

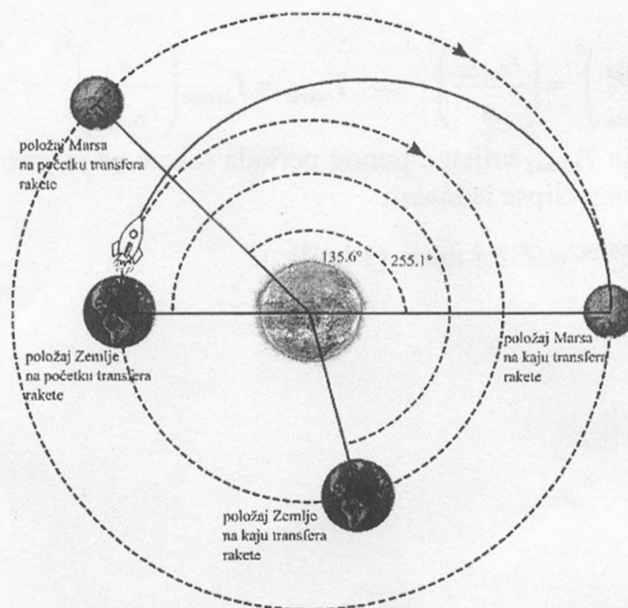
(1 bod)

Slično, Zemlja će se u istom vremenu pomaknuti za kut:

$$\alpha_{Zemlja} = \omega_{Zemlja} t = \frac{2\pi}{T_{Zemlja}} t = 4.452\ \text{rad} = 255.1°$$

(1 bod)

Skica: **(2 boda)**



Brzina rakete v_0 u kružnoj putanji na visini 322 km iznad površine Zemlje izračunamo pomoću drugog Newtonovog zakona:

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = \frac{GmM_Z}{r_0^2} \quad \textbf{(1 bod)}$$

gdje je $r_0 = R_Z + h = 6700$ km. Dobije se:

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_Z}{r_0}} = 7.7\ \text{km/s} \quad \textbf{(1 bod)}$$

Nakon što raketa dobije dodatnu brzinu na Zemlji vrijedi zakon očuvanja energije:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_Z}{r_0} = \frac{1}{2}mv'^2 \quad \textbf{(1 bod)}$$

Gdje je v' brzina koji ima raketa u trenutku kada je izašla iz gravitacijskog polja Zemlje te se nalazi na početnoj točki Hohmannove putanje. Ta brzina jednaka je razlici brzina potrebnoj da raketa uđe iz kružne putanje oko Sunca u Hohmannovu putanju oko Sunca te ju možemo izračunati koristeći *vis-viva* jednadžbu:

$$v' = v_2 - v_1$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{r_{ZS}}} = 29.8\ \text{km/s}$$

$$v_2 = \sqrt{GM_S\left(\frac{2}{r_{ZS}} - \frac{1}{a}\right)} = 32.7\ \text{km/s}$$

$$v' = v_2 - v_1 = 2.9\ \text{km/s} \quad \textbf{(3 boda)}$$

Uvrštavanjem u gornji zakon očuvanja energije dobije se:

$$v = \sqrt{\frac{2GM_Z}{r_0} + v'^2} = 11.3\ \text{km/s} \quad \textbf{(1 bod)}$$

Razlika brzine koju raketa mora dobiti u odnosu na početnu brzinu u kružnoj orbiti oko Zemlje iznosi:

$$\Delta v = v - v_0 = 3.6\ \text{km/s} \quad \textbf{(1 bod)}$$

$$\left(\frac{T_{Zemlja}}{T_{raketa}}\right)^2 = \left(\frac{r_{Zemlja}}{a}\right)^3 \Rightarrow T_{raketa} = T_{Zemlja}\left(\frac{a}{r_{Zemlja}}\right)^{3/2} = 517.6 \text{ dana}$$ **(1 bod)**

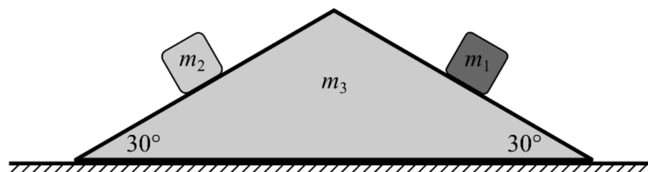
gdje je T_{raketa} vrijeme punog perioda rakete pa je prema tome vrijeme potrebno da raketa prijeđe polovicu elipse jednako:

$$t = \frac{T_{raketa}}{2} = 258.8 \text{ dana}$$ **(1 bod)**

DRŽAVNI SUSRET I NATJECANJE MLADIH FIZIČARA
Vinkovci, 2. – 5. svibnja 2017.

Srednje škole – 1. grupa

Zadatak 1 (17 bodova)

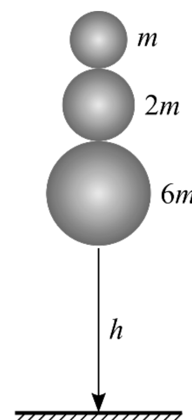


Tri tijela nalaze se u položaju kao na slici. Njihove mase su redom jednake: m_1 = 4 kg, m_2 = 1 kg i m_3 = 1 kg. Trenje između svih površina je zanemarivo. U početnom trenutku pustimo sustav da se slobodno giba. Duljina stranica kosine, na kojima se nalaze tijela mase m_1 i m_2, iznosi 3 m.

a) Nacrtajte dijagrame sila na sva tri tijela.

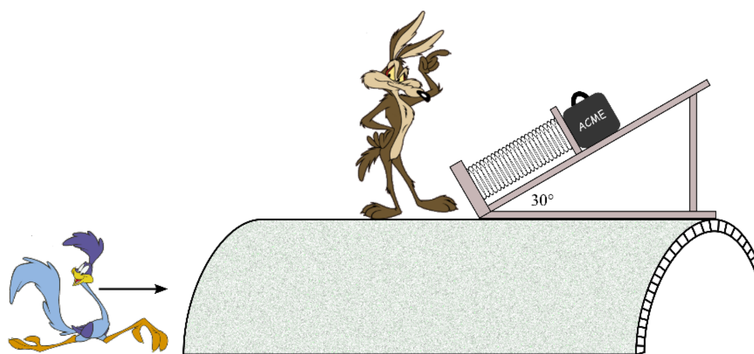
b) Nakon 0.5 s gibanja odredite položaj tijela mase m_1 i m_2 u odnosu na njihov početni položaj u sustavu kosine. Odredite položaj kosine nakon 0.5 s gibanja u odnosu na njezin početni položaj obzirom na horizontalnu podlogu.

Zadatak 2 (17 bodova)



Tri lopte nalaze se u početnom položaju koji je prikazan na slici. Lopte se međusobno ne dodiruju, ali razmak između njih možemo smatrati zanemarivim u odnosu na dimenzije lopte i udaljenost od tla. U početnom trenutku lopte miruju u prikazanom položaju, a zatim ih pustimo da slobodno padaju. Lopte se savršeno elastično odbijaju jedna od druge i od tla. Izračunajte maksimalnu visinu na koju će se popesti lopta najmanje mase u odnosu na njezinu početnu visinu. Zanemarite otpor zraka.

Zadatak 3 (18 bodova)



Ptica Trkačica trči stalnom brzinom 32 km/h po pravcu prema tunelu. Na vrhu tunela nalazi se Kojot, koji je u nastojanju da ulovi Pticu Trkačicu izgradio uređaj za lansiranje utega prikazan na slici. Duljina nerastegnute opruge jednaka je duljini platforme na kojoj se nalazi uteg. U početnom trenutku opruga je sabijena za polovicu svoje nerastegnute duljine (položaj prikazan na slici) i u istom trenutku Kojot pusti sustav opruge i utega da se giba. Trenje između utega i platforme, na kojoj se nalazi, je zanemarivo. Duljina platforme iznosi 2 m. Konstanta elastičnosti opruge iznosi 220 N/m. Masa utega jednaka je 2 kg. U trenutku, kada se uteg nalazi na najvećoj visini od tla za vrijeme leta, Ptica Trkačica se nalazi na ulazu u tunel. Duljina tunela jednaka je 6 m, a visina 9 m. Zanemarite masu opruge i dimenzije. Uzmite da je gravitacijsko ubrzanje Zemlje jednako g = 10 m/s^2.

a) Izračunajte brzinu utega u trenutku kada se odvoji od platforme.

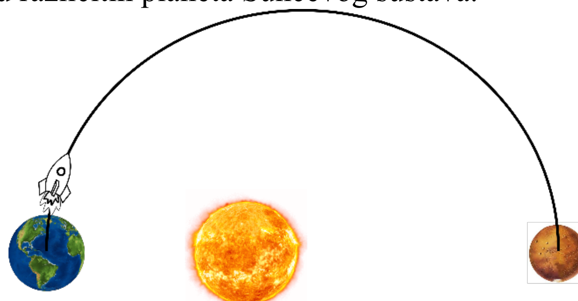
b) Izračunajte maksimalnu visinu, koju postiže uteg, za vrijeme leta.

c) Hoće li uteg pogoditi Pticu Trkačicu?

d) Promotrite gibanje utega po platformi. Odredite ovisnost ubrzanja utega o položaju na platformi te skicirajte tu ovisnost na grafu.

Zadatak 4 (18 bodova)

Hohmannov transfer je manevar u orbitalnoj mehanici koji se koristi za prijelaz svemirske letjelice iz jedne kružne putanje u drugu kružnu putanju oko istog planeta ili zvijezde. Hohmanov transfer uključuje dvije gotovo trenutne promjene brzine (paljenjem motora) svemirske letjelice: prvi put se brzina mijenja u početnoj točki putanje kada letjelica iz početne kružne putanje ulazi u Hohmannovu putanju, a drugi put u konačnoj točki putanje kada letjelica iz Hohmannove putanje ulazi u konačnu kružnu putanju. Gibanje letjelice između dvije promjene brzine određeno je gravitacijom masivnog tijela oko kojeg se letjelica giba. Hohmannov transfer je energijski najpovoljniji, a koristi se npr. za lansiranje satelita iz niske orbite oko Zemlje u geostacionarnu orbitu, no i za lansiranje svemirskih letjelica između različitih planeta Sunčevog sustava.



U ovom zadatku promotrit ćemo lansiranje rakete sa Zemlje na Mars pomoću Hohmannovog transfera. Možemo uzeti da se Zemlja giba oko Sunca po kružnoj putanji polumjera $149.6 \cdot 10^6$ km, a period gibanja iznosi 365.25 dana. Mars se također giba oko Sunca po kružnoj putanji s periodom 686.96 dana. Kružne putanje Zemlje i Marsa oko Sunca nalaze se u istoj ravnini te se Zemlja i Mars rotiraju oko Sunca u istom smjeru. Kao što je prikazano na slici, Hohmannova putanja ima oblik polovice elipse čija se početna točka nalazi na kružnoj putanji Zemlje oko Sunca, a konačna točka na kružnoj putanji Marsa oko Sunca te se početna i konačna točka nalaze na suprotnim stranama u odnosu na Sunce. Raketa se na prikazanoj putanji giba samo pod utjecajem gravitacije Sunca, dok se utjecaj gravitacije drugih planeta može zanemariti. Iz danih podataka izračunajte:

a) polumjer kružne putanje Marsa oko Sunca,
b) veliku poluos elipse koja predstavlja putanju rakete,
c) vrijeme transfera rakete sa Zemlje na Mars.
d) Odredite položaj Marsa na početku transfera rakete sa Zemlje te položaj Zemlje na kraju transfera rakete na Mars i nacrtajte skicu.

U nastavku zadatka detaljnije ćemo razmotriti gibanje rakete od trenutka paljenja motora na Zemlji do ulaska u Hohmannovu putanju oko Sunca. Pretpostavimo da se raketa u početnom trenutku nalazi u niskoj kružnoj orbiti oko Zemlje na visini 322 km od površine Zemlje. Tada se pale motori rakete te ona dobiva dodatnu brzinu. Vrijeme ubrzavanja rakete je zanemarivo. Brzina, koju raketa ima nakon ubrzavanja, mora biti dovoljna da raketa savlada gravitacijsko privlačenje Zemlje i da uđe u Hohmannovu putanju. (Ako bi raketa dobila brzinu dovoljnu samo da savlada gravitacijsko privlačenje Zemlje, ona bi se gibala po kružnoj putanji oko Sunca polumjera jednakog polumjeru kruženja Zemlje oko Sunca.) Put, koji raketa prijeđe do izlaska iz gravitacijskog polja Zemlje, je zanemariv u odnosu na udaljenost Zemlja-Sunce. Izračunajte:

e) Brzinu rakete u niskoj kružnoj orbiti oko Zemlje u referentnom sustavu Zemlje.
f) Razliku brzine koju raketa mora dobiti nakon paljenja motora kako bi savladala gravitacijsko privlačenje Zemlje i ušla u Hohmannovu putanju.

U orbitalnoj mehanici gibanje tijela po putanji oko masivnog tijela (planeta ili zvijezde) opisano je *vis-viva* jednadžbom:

$$v^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

gdje je v brzina koju tijelo ima na udaljenosti r od masivnog tijela, a je velika poluos putanje tijela, M je masa masivnog tijela.

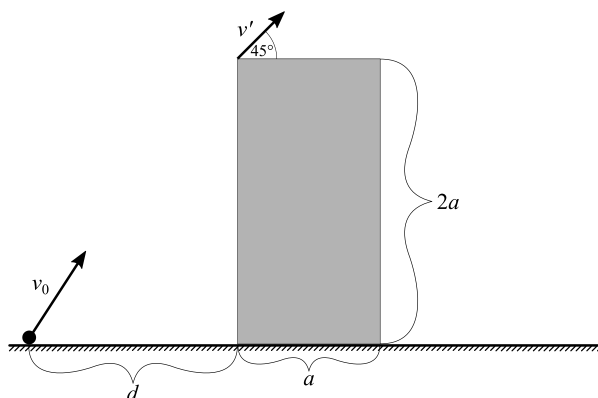
Masa Zemlje iznosi $5.972 \cdot 10^{24}$ kg, masa Sunca iznosi $1.989 \cdot 10^{30}$ kg, polumjer Zemlje iznosi 6378 km, gravitacijska konstanta je jednaka $G = 6.674 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}.

Državno natjecanje iz fizike 2017/2018
Pula, 17. – 20. travnja 2018.

Srednje škole – 1. grupa
Rješenja i smjernice za bodovanje

1. zadatak (17 bodova)

Iz uvjeta minimalne brzine v_0 takve da malo tijelo prebaci kvadar slijedi da smjer brzine malog tijela na gornjem lijevom rubu kvadra v' mora zatvarati kut 45° s horizontalom **(1 bod)** (vidi sliku 1) te da je iznos brzine v' takav da je doseg kosog hica iz te točke jednak širini kvadra a **(1 bod)**. Za gibanje malog tijela od lijevog gornjeg ruba do desnog gornjeg ruba kvadra u horizontalnom (x) i vertikalnom (y) smjeru vrijede jednadžbe:



Slika 1: Brzina malog tijela na gornjem lijevom rubu kvadra v' zatvara kut 45° s horizontalom.

$x(t) = v'_x t,\ y(t) = v'_y t - \frac{1}{2}gt^2$, **(2 boda)**

Uvrštavanjem zadanih uvjeta slijedi da je

$v'_x = v'_y = \frac{1}{\sqrt{2}}v'$, **(1 bod)**

$a = x(t') = \frac{1}{\sqrt{2}}v't' \ \Rightarrow\ t' = \frac{\sqrt{2}a}{v'}$, **(1 bod)**

$0 = y(t') = \frac{1}{\sqrt{2}}v't' - \frac{1}{2}gt'^2 = a - \frac{ga^2}{v'^2}$, **(1 bod)**

$v'^2 = ga \ \Rightarrow\ v' = \sqrt{ga}$. **(1 bod)**

Brzinu v_0 izračunamo pomoću zakona očuvanja energije:

$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg2a + \frac{1}{2}mv'^2$ **(1 bod)**

$v_0^2 = 4ga + ga = 5ga \ \Rightarrow\ v_0 = \sqrt{5ga}$ **(1 bod)**

Horizontalna komponenta brzine se ne mijenja za vrijeme leta te stoga vrijedi $v_{0x} = v'_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ga}$. Vertikalnu komponentu brzine v_0 izračunamo na način:

$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \ \Rightarrow\ v_{0y}^2 = v_0^2 - v_{0x}^2 = 5ga - \frac{1}{2}ga = \frac{9}{2}ga \ \Rightarrow\ v_{0y} = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{ga}$ **(1 bod)**

Za gibanje malog tijela u horizontalnom (x) i vertikalnom (y) smjeru od točke izbačaja vrijede jednadžbe:

$x(t) = v_{0x}t,\ y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$.

Uvrštavanjem zadanih uvjeta slijedi:

$d = x(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{ga}t_1 \ \Rightarrow\ t_1 = \frac{\sqrt{2}d}{\sqrt{ga}}$, **(1 bod)**

$2a = y(t_1) = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{ga}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = 3d - \frac{d^2}{a}$, **(1 bod)**

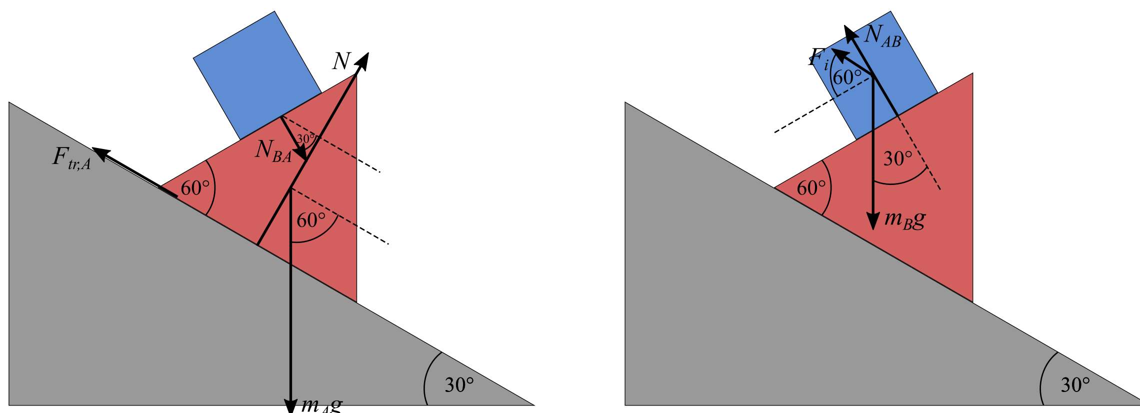
$0 = d^2 - 3ad + 2a^2 = (d-a)(d-2a)$.

Rješenja jednadžbe su: $d_1 = a$ i $d_2 = 2a$. Rješenje, koje odgovara uvjetu zadatka, je $d = a$ **(2 boda)**.

Najvišu točku putanje dobijemo iz uvjeta da je vertikalna brzina jednaka nuli:
$v_y(t) = v_{0y} - gt,$
$0 = v_y(t_2) = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{ga} - gt_2 \;\Rightarrow\; t_2 = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{a}{g}},$ **(1 bod)**
$h_{max} = y(t_2) = \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{ga}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 = \frac{9}{2}a - \frac{9}{4}a = \frac{9}{4}a.$ **(1 bod)**

2. zadatak (18 bodova)

Na tijelo A u referentnom sustavu kosine djeluju četiri sile: sila teža $m_A\vec{g}$, sila reakcije podloge (kosine) $\vec{N}$, sila tijela B na tijelo A $\vec{N}_{BA}$ i sila trenja $\vec{F}_{tr,A}$. Sile na tijelo A prikazane su na slici 2, također su označeni kutevi pojedinih sila u odnosu na nagib kosine po kojoj se giba tijelo A. Na tijelo B u referentnom sustavu tijela A djeluju tri sile: sila teža $m_B\vec{g}$, sila tijela A na tijelo B $\vec{N}_{AB}$ i inercijalna sila $\vec{F}_i$. Sile na tijelo B prikazane su na slici 2 desno, također su označeni kutevi pojedinih sila u odnosu na smjer gibanja tijela B. Dijagram sila na tijelo A: **(2 boda)**, dijagram sila na tijelo B: **(2 boda)**.



Slika 2: Sile na tijelo A u referentnom sustavu kosine (lijevo) i sile na tijelo B u referentnom sustavu tijela A (desno).

Drugi Newtonov zakon za tijelo A za smjer paralelan i okomit na kosinu glasi:
$m_Aa_A = \frac{1}{2}m_Ag + \frac{\sqrt{3}}{2}N_{BA} - F_{tr,A},$ **(1 bod)**
$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}m_Ag + \frac{1}{2}N_{BA} - N.$ **(1 bod)**
Drugi Newtonov zakon za tijelo B u referentnom sustavu tijela A za smjer paralelan i okomit na podlogu, po kojoj se tijelo B giba, glasi:
$m_Ba_B = \frac{1}{2}m_Bg + \frac{1}{2}F_i,$ **(1 bod)**
$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}m_Bg - N_{AB} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_i.$ **(1 bod)**
Sila trenja na tijelo A je $F_{tr,A} = \mu N$. **(1 bod)** Sila tijela A na tijelo B jednakog je iznosa sili tijela B na tijelo A prema trećem Newtonovom zakonu: $N_{AB} = N_{BA}$. **(1 bod)**
Inercijalna sila na tijelo B jednaka je: $F_i = m_Ba_A$. **(1 bod)**
Sustav jednadžbi rješavamo tako da iz druge jednadžbe izrazimo silu reakcije podloge N:
$N = \frac{\sqrt{3}}{2}m_Ag + \frac{1}{2}N_{BA}$
i uvrstimo u prvu jednadžbu zajedno s izrazom za silu trenja $F_{tr,A}$:

$m_A a_A = \frac{1}{2} m_A g + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{BA} - \frac{\sqrt{3}}{2} \mu m_A g - \frac{1}{2} \mu N_{BA}.$
Nadalje uvrstimo koeficijent trenja μ i sredimo:
$m_A a_A = \frac{1}{8} m_A g + \frac{3\sqrt{3}}{8} N_{BA}.$
Zatim iz četvrte jednadžbe izrazimo silu tijela A na tijelo B N_{AB}:
$N_{BA} = N_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} m_B g - \frac{\sqrt{3}}{2} F_i,$
uvrstimo izraz za inercijalnu silu:
$N_{BA} = \frac{\sqrt{3}}{2} (m_B g - m_B a_A)$
i uvrstimo u jednadžbu za ubrzanje tijela A:
$m_A a_A = \frac{1}{8} m_A g + \frac{9}{16} (m_B g - m_B a_A)$
Nakon sređivanja:
$\left(m_A + \frac{9}{16} m_B \right) a_A = \frac{1}{8} \left(m_A + \frac{9}{2} m_B \right) g.$
Uvrštavanjem zadanog omjera masa tijela A i B $m_A/m_B = 3$ dobije se:
$\frac{19}{16} a_A = \frac{5}{16} g \ \Rightarrow \ a_A = \frac{5}{19} g.$ **(6 bodova)**
Ubrzanje tijela B u referentnom sustavu tijela A dobije se uvrštavanjem u treću jednadžbu:
$m_B a_B = \frac{1}{2} m_B g + \frac{1}{2} m_B a_A$
$a_B = \frac{1}{2} (g + a_A) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5}{19} \right) g = \frac{12}{19} g.$ **(1 bod)**

3. zadatak (17 bodova)

Središte manjeg valjka za vrijeme jednog njegovog okreta oko osi, koja prolazi njegovim središtem, prijeđe put:
$l_1 = 2\pi R_2.$ **(2 boda)**
Središte manjeg valjka, dok se ne vrati u početni položaj, prijeđe ukupan put:
$l_{ukupno} = 2\pi (R_1 + R_2).$ **(2 boda)**
Broj okreta manjeg valjka oko osi, koja prolazi njegovim središtem, dok se ne vrati u početni položaj jednak je omjeru ukupnog puta l_{ukupno} i puta za vrijeme jednog okreta l_1:
$n = \frac{l_{ukupno}}{l_1} = \frac{2\pi (R_1 + R_2)}{2\pi R_2} = \frac{R_1}{R_2} + 1 = 2 + 1 = 3.$ **(1 bod)**
Vrijeme potrebno da manji valjak napravi jedan okret oko osi koja prolazi njegovim središtem:
$t_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0.1\pi} = 20 \text{ s}.$ **(1 bod)**
Prema tome, vrijeme potrebno da manji valjak dođe u početni položaj iznosi:
$t = n t_1 = 3 t_1 = 60 \text{ s}.$ **(1 bod)**
Neka je ishodište koordinatnog sustava u središtu većeg valjka. U početnom trenutku položaj središta manjeg valjka opisan je vektorom:
$\vec{r}_1 = (R_1 + R_2)\,\hat{i} = (30 \text{ cm})\hat{i}.$ **(1 bod)**
U vremenskom intervalu $\Delta t = 5$ s središte manjeg valjka je prešlo put:
$\Delta l = R_2 \Delta\theta = R_2 \omega \Delta t$ **(1 bod)**
te se zakrenuo oko središta većeg valjka za kut:

$$\Delta\theta' = \frac{\Delta l}{R_1 + R_2} = \frac{R_2 \omega \Delta t}{R_1 + R_2} = \frac{\omega \Delta t}{\frac{R_1}{R_2} + 1} = \frac{\omega \Delta t}{3} = \frac{0.1\pi \text{ rad/s} \cdot 5 \text{ s}}{3} = \frac{\pi}{6} = 30°. \textbf{ (2 boda)}$$

Položaj manjeg valjka nakon vremenskog intervala Δt prikazan je isprekidanom linijom na slici 3, a položaj njegovog središta može se opisati vektorom:

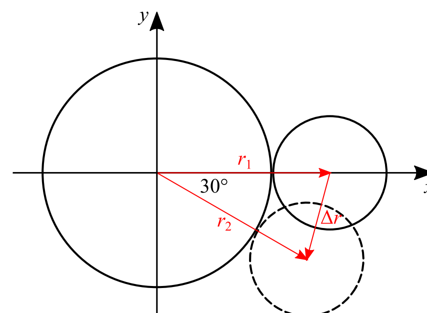
$\vec{r}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}(R_1 + R_2)\,\hat{\imath} - \frac{1}{2}(R_1 + R_2)\,\hat{\jmath}$,

$\vec{r}_2 = (26 \text{ cm})\hat{\imath} + (-15 \text{ cm})\hat{\jmath}$. **(1 bod)**

Vektor pomaka središta manjeg valjka u vremenskom intervalu Δt iznosi:

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \left(-\frac{\sqrt{3}-2}{2}\hat{\imath} - \frac{1}{2}\hat{\jmath}\right)(R_1 + R_2)$,

$\Delta\vec{r} = (-4 \text{ cm})\hat{\imath} + (-15 \text{ cm})\hat{\jmath}$. **(1 bod)**



Slika 3: Položaj manjeg valjka nakon vremenskog intervala Δt.

Skica vektora $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ i $\Delta\vec{r}$: **(2 boda)**.

Srednja brzina translacije središta manjeg valjka po pomaku dana je izrazom:

$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(-4 \text{ cm})\hat{\imath} + (-15 \text{ cm})\hat{\jmath}}{5 \text{ s}} = (-0.8\hat{\imath} - 3\hat{\jmath}) \text{ cm/s}$. **(1 bod)**

Iznos vektora $\bar{\vec{v}}$ je:

$|\bar{\vec{v}}| = \sqrt{0.8^2 + 3^2} \text{ cm/s} = 3.1 \text{ cm/s}$. **(1 bod)**

4. zadatak (18 bodova)

Brzina kuglice B neposredno prije sudara s kuglicom A može se izračunati pomoću zakona očuvanja energije:

$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \;\Rightarrow\; v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 0.8 \text{ m}} = 4 \text{ m/s}$. **(2 boda)**

Za sudar kuglica A i B vrijedi zakon očuvanja količine gibanja:

$m_1 v_1 = -m_1 u_1 + m_2 u_2$, **(2 boda)**

gdje je u_1 iznos brzine kuglice B neposredno nakon sudara pri čemu je uzeto u obzir da je smjer brzine u_1 suprotan smjeru brzine v_1, a u_2 je brzina kuglice A neposredno nakon sudara. Za sudar vrijedi i zakon očuvanja energije:

$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$. **(1 bod)**

Iz zakona očuvanja količine gibanja izrazimo brzinu kuglice A neposredno nakon sudara:

$u_2 = \frac{m_1}{m_2}(v_1 + u_1)$

i uvrstimo u zakon očuvanja energije:

$m_1 v_1^2 = m_1 u_1^2 + m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2}(v_1 + u_1)^2$,

$v_1^2 - u_1^2 = \frac{m_1}{m_2}(v_1 + u_1)^2$,

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(v_1 - u_1)(v_1 + u_1)}{(v_1 + u_1)^2} = \frac{v_1 - u_1}{v_1 + u_1}$. **(2 boda)**

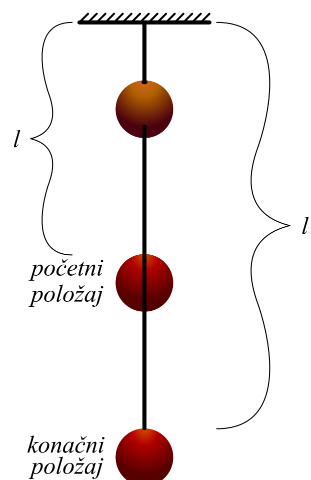
Brzinu kuglice B neposredno nakon sudara odredimo pomoću zakona očuvanja energije koristeći uvjet da se kuglica nakon sudara popne na $h/4$ visine:

$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = m_1 g \frac{h}{4} \;\Rightarrow\; u_1 = \sqrt{\frac{gh}{2}} = \frac{1}{2} v_1 = 2 \text{ m/s}$. **(1 bod)**

Uvrštavanjem brzine u_1 u izraz za omjer masa dobije se:

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; m_2 = 3m_1 = 600$ g. **(1 bod)**
Brzina kuglice A neposredno nakon sudara ima smjer prema dolje i iznosi:
$u_2 = \frac{m_1}{m_2}\left(v_1 + u_1\right) = \frac{1}{3}(4 \text{ m/s} + 2 \text{ m/s}) = 2 \text{ m/s}.$ **(1 bod)**

Za gibanje kuglice A nakon sudara s kuglicom B prema dolje vrijedi zakon očuvanja energije:
$\frac{1}{2}m_2u_2^2 + m_2g\left(l' - l\right) + \frac{1}{2}k\left(l - l_0\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(l' - l_0\right)^2$, **(2 boda)**
gdje je l_0 duljina nerastegnute niti, l duljina niti u početnom položaju i l' je duljina niti u konačnom položaju (vidi sliku 4). Budući da u početnom trenutku kuglica A miruje u ravnotežnom položaju, vrijedi:
$m_2g = k\left(l - l_0\right) \;\Rightarrow\; l - l_0 = \frac{m_2g}{k}$ **(1 bod)**
Uvrštavanjem u zakon očuvanja energije dobije se:
$\frac{1}{2}m_2u_2^2 + m_2g\left(l' - l\right) + \frac{1}{2}\frac{m_2^2g^2}{k} = \frac{1}{2}k\left(l' - l + \frac{m_2g}{k}\right)^2$,
$l' - l = \sqrt{\frac{m_2u_2^2}{k}}$. **(2 boda)**
Uslijed maksimalnog opterećenja duljina elastične niti jednaka je l' te vrijedi:
$F_{max} = k\left(l' - l_0\right) = k\left(l' - l\right) + k\left(l - l_0\right) = \sqrt{km_2u_2^2} + m_2g.$
(2 boda)
Iz prethodne jednadžbe izračuna se konstanta elastičnosti niti:
$\sqrt{km_2u_2^2} = F_{max} - m_2g$
$k = \frac{\left(F_{max} - m_2g\right)^2}{m_2u_2^2} = \frac{\left(18 \text{ N} - 0.6 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2\right)^2}{0.6 \text{ kg} \cdot 4 \text{ m}^2/\text{s}^2} = 60 \text{ N/m}.$ **(1 bod)**



Slika 4: Početni i konačni položaj kuglice A za njezino gibanje nakon sudara.

Državno natjecanje iz fizike 2017/2018
Pula, 17. – 20. travnja 2018.

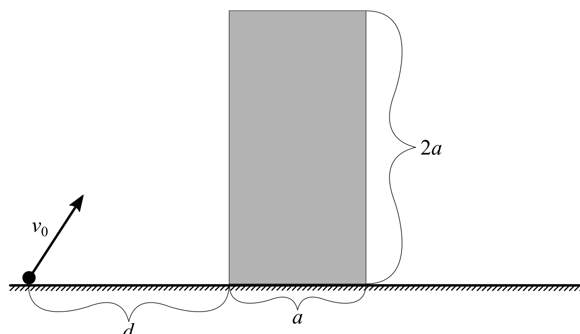
Srednje škole – 1. grupa

VAŽNO: Tijekom ispita **ne smijte imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...)**. Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. **Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.**

1. zadatak (17 bodova)

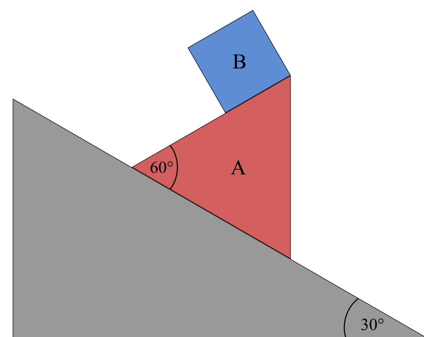
Čovjek se nalazi ispred zgrade oblika kvadra širine a i visine $2a$ i u ruci drži lopticu. Čovjek želi lopticu prebaciti preko zgrade dajući joj najmanju moguću početnu brzinu v_0. Pritom čovjek izbaci lopticu s udaljenosti d od zgrade takve da je ispunjen uvjet najmanje moguće brzine. Zanemarite visinu čovjeka, odnosno pretpostavite da je loptica izbačena s tla, kao što je prikazano na slici. Sve rezultate izrazite preko dvije poznate veličine: širina zgrade a i gravitacijsko ubrzanje g.

a) Izračunajte najmanji mogući iznos brzine v_0 takav da loptica prebaci zgradu.
b) Izračunajte udaljenost od zgrade d s koje čovjek treba baciti lopticu tako da je brzina v_0 najmanja moguća.
c) Izračunajte maksimalnu visinu koju postiže malo tijelo za vrijeme leta u odnosu na horizontalnu podlogu.



2. zadatak (18 bodova)

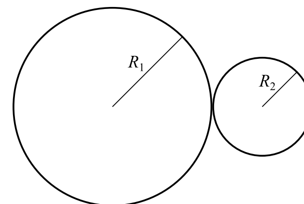
Na kosini nagiba 30° u odnosu na horizontalu nalazi se tijelo A, a na tijelu A se nalazi tijelo B (vidi sliku). Kosina je nepomična, dok se tijelo A može gibati po kosini, a tijelo B po tijelu A. Mase tijela A i B odnose se kao $m_A : m_B = 3 : 1$. Koeficijent trenja između tijela A i kosine iznosi $\sqrt{3}/4$, dok je trenje između tijela B i tijela A zanemarivo. U početnom trenutku sustav je pušten da se giba iz mirovanja.



a) Skicirajte sve sile koje djeluju na tijelo A i sve sile koje djeluju na tijelo B.
b) Izračunajte ubrzanje tijela A u referentnom sustavu kosine.
c) Izračunajte ubrzanje tijela B u referentnom sustavu tijela A.

3. zadatak (17 bodova)

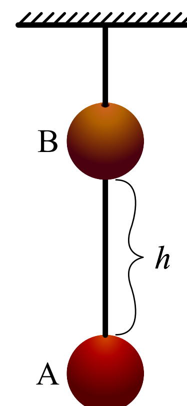
Dva valjka polumjera R_1 i R_2 ($R_1 > R_2$) stoje na svojim bazama na horizontalnoj podlozi. Na slici je prikazan početni položaj dva valjka. Valjak većeg polumjera miruje, a valjak manjeg polumjera se kotrlja bez klizanja po valjku većeg polumjera u smjeru kazaljke na satu. Kutna brzina rotacije manjeg valjka oko osi koja prolazi kroz njegovo središte iznosi 0.1π rad/s. Omjer polumjera valjaka je $R_1/R_2 = 2$.



a) Izračunajte koliko će okreta oko osi koja prolazi kroz njegovo središte (i koja se zajedno s njim pomiče) napraviti manji valjak dok se ne vrati u početni položaj.
b) Izračunajte vrijeme nakon kojeg će se manji valjak vratiti u početni položaj.
c) Neka je polumjer manjeg valjka 10 cm. Odredite i skicirajte vektor pomaka središta manjeg valjka nakon $\Delta t = 5$ s od početka gibanja. Odredite vektor srednje brzine translacije središta manjeg valjka po pomaku u istom vremenskom intervalu i izračunajte iznos te brzine.

4. zadatak (18 bodova)

Kuglica A pričvršćena je za elastičnu nit čiji je drugi kraj učvršćen za strop. Kuglica B duž svog promjera ima rupu kroz koju ju provučena elastična nit. U početnom trenutku kuglica A miruje u ravnotežnom položaju, a kuglicu B pustimo da slobodno pada s visine $h = 0.8$ m iznad kuglice A, kao što je prikazano na slici. Nakon elastičnog sudara s kuglicom A kuglica B se popne za $h/4$ u odnosu na visinu na kojoj se nalazi neposredno nakon sudara. Masa kuglice B iznosi 200 g.



a) Izračunajte masu kuglice A.
b) Izračunajte iznos i smjer brzine kuglica A i B neposredno nakon sudara.
c) U najnižem položaju kuglice A nakon sudara elastična nit je rastegnuta maksimalno koliko je moguće da ne dođe do pucanja niti. Ako elastična nit može izdržati maksimalno opterećenje od 18 N, izračunajte konstantu njezine elastičnosti k.

Uzmite da je gravitacijsko ubrzanje $g = 10$ m/s^2.

Državno natjecanje iz fizike 2018/2019
Poreč, 10.-13. travnja 2019.
Srednje škole – 1. skupina

VAŽNO: Tijekom ispita **ne smijte imati nikakav pisani materijal (knjige, bilježnice, formule...)**. Za pisanje koristite kemijsku olovku ili nalivpero. **Pri ruci ne smijete imati mobitele ni druge elektroničke uređaje osim kalkulatora.**

1. zadatak (17 bodova)

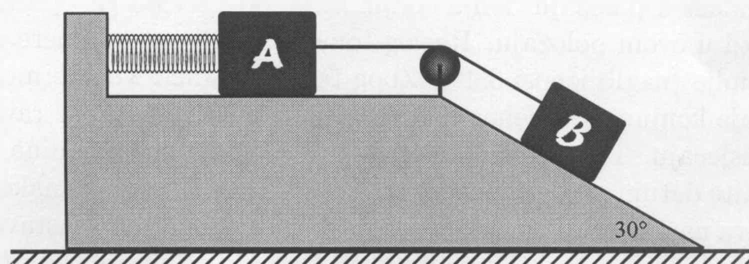
Riba pliva nizvodno rijekom stalnom brzinom 17.6 km/h u odnosu na vodu tik ispod površine vode. Rijeka teče brzinom 4 km/h. Ptica leti stalnom brzinom tako da smjer njezine brzine zatvara kut 60° s horizontalom. Riba i ptica gibaju se jedna prema drugoj i to u istoj vertikalnoj ravnini. Ako je početna udaljenost ribe i ptice 42 m, ptica će nakon 3 s gibanja uloviti ribu. Nakon što je ulovila ribu, ptica se s ribom uzdiže iznad rijeke brzinom jednakog iznosa, dok smjer brzine zatvara pravi kut s pravcem kojim se riba spuštala do rijeke. Nakon 2 s gibanja riba ispušta pticu.

a) Izračunajte brzinu ptice.
b) Izračunajte maksimalnu visinu ribe.
c) Izračunajte položaj pada ribe u rijeku (u odnosu na njezin početni položaj).
d) Skicirajte putanje ribe i ptice te izračunajte udaljenost ribe i ptice u trenutku pada ribe u rijeku.

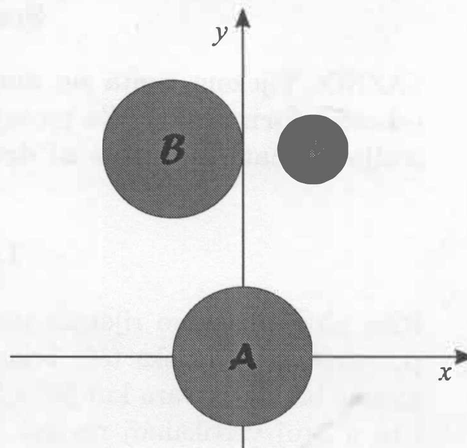
Uzmite da je gravitacijsko ubrzanje $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$.

2. zadatak (17 bodova)

Platforma miruje na horizontalnoj podlozi. Na platformu postavimo tijela A i B, koja su međusobno povezana nerastezljivim užetom zanemarive mase preko koloture zanemarive mase, a tijelo A povezano je i s platformom preko opruge. Mase tijela A i B odnose se kao $m_A : m_B = 1 : 2$. Koeficijent trenje između tijela A i B i platforme je $\mu = 0.2$. Na početku sustav pridržavamo u položaju u kojem je opruga nerastegnuta te ga zatim pustimo da se giba. Tijela A i B se bigaju u odnosu na platformu, a platforma miruje na horizontalnoj podlozi. U trenutku u kojem je opruga rastegnuta za 10% u odnosu na nerastegnutu duljinu, ubrzanje tijela A i B u odnosu na platformu iznosi $0.1g$. Platforma uslijed djelovanja vanjske sile počinje ubrzavati stalnim ubrzanjem a u odnosu na horizontalnu podlogu. U trenutku u kojem je duljina opruga za 40% veća u odnosu na nerastegnutu duljinu, ubrzanje tijela A i B u odnosu na platformu jednako je nuli. Izračunajte iznos i smjer ubrzanja platforme a. Trenje između platforme i horizontalne podloge je zanemarivo, kao i trenje između užeta i koloture.



3. zadatak (18 bodova)



Tri novčića međusobno različitih gustoća nalaze se na horizontalnoj podlozi po kojoj se mogu gibati bez trenja. Polumjer novčića A i B je $2a$, a novčića C a. Položaj sva tri novčića u početnom trenutku prikazan je na slici: središte novčića A nalazi se u ishodištu koordinatnog sustava, središte novčića B nalazi se na koordinati $(-2a, 6a)$ i središte novčica C nalazi se na koordinati $(2a, 6a)$. U početnom trenutku novčić A giba se brzinom v_A u pozitivnom smjeru osi y, a novčići B i C miruju. Nakon svih sudara novčić A miruje, a novčić C se giba brzinom 10 cm/s. Masa novčića C iznosi 5 g. Sudari novčića su savršeno elastični. Rub svakog novčića je savršeno gladak tako da prilikom sudara ne dolazi do rotacije novčića oko svoje osi. Izračunajte:

a) brzinu novčića A prije sudara v_A,
b) iznos i smjer brzine novčića B nakon sudara i smjer brzine novčića C nakon sudara,
d) mase novčića A i B.

4. zadatak (18 bodova)

Promotrimo gibanje Zemlje i Venere oko Sunca. Pretpostavimo da se planeti gibaju po kružnim putanjama. Polumjer kružne putanje Venere oko Sunca iznosi 108 208 000 km. Period gibanja Zemlje oko Sunca jednak je 365.26 dana. Masa Sunca iznosi $1.989 \cdot 10^{30}$ kg, a gravitacijska konstanta je $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \mathrm{m}^3/\mathrm{kgs}^2$.

a) Izračunajte period gibanja Venere oko Sunca.

Vrijeme potrebno da planet obiđe jednom oko Sunca naziva se još i siderički period. Sinodički period nekog planeta je vrijeme potrebno da planet dođe u isti položaj u odnosu na Zemlju. Sinodički period Venere možemo najlakše odrediti, ako za početni položaj uzmemo položaj donje konjunkcije Venere. U položaju donje konjunkcije Venera se nalazi na pravcu između Zemlje i Sunca i to između njih.

b) Izračunajte koliko će punih krugova oko Sunca napraviti Zemlja, a koliko Venera između dvije uzastopne donje konjunkcije Venere.
c) Izračunajte sinodički period Venere, odnosno vrijeme između dviju uzastopne donje konjunkcije Venere.

Prolazak planeta ispred Sunčeve ploče naziva se tranzit. Tranzit Venere opaža se kad se Venera nalazi u položaju donje konjunkcije, no nećemo ga opaziti svaki put kada se Venera nalazi u ovom položaju. Razlog tome je nagib staze Venere oko Sunca u odnosu na stazu Zemlje (nagib iznosi 3.4°). Zbog toga se tranzit Venere može opaziti samo kad je točka donje konjunkcije Venere istovremeno i točka u kojoj se ravnine gibanja Zemlje i Venere presjecaju. Tranzit Venere opažen je 8. lipnja 2004. godine.

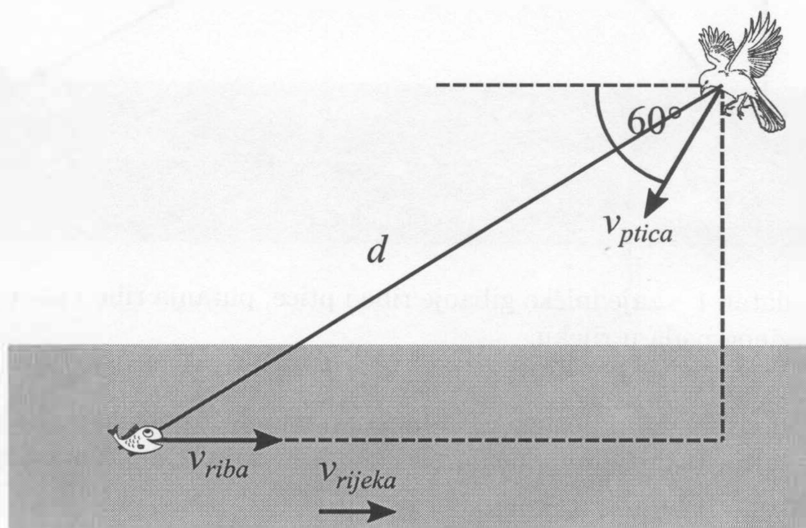
d) Odredite datum prvog sljedećeg tranzita Venere tj. vrijeme nakon kojeg će se Zemlja i Venera naći u približno istom položaju u koordonatnom sustavu vezanom za daleke zvijezde koje miruju. (Dozvoljeno odstupanje u kutnom položaju Zemlje i Venere je $\leq 3°$.)

Državno natjecanje iz fizike 2018/2019
Poreč, 10.-13. travnja 2019.
Srednje škole – 1. skupina

Rješenja i smjernice za bodovanje

1. zadatak (17 bodova)

Položaj ribe i ptice u početnom trenutku, kao i smjer njihove brzine prikazani su na slici 1.



Slika 1: Zadatak 1 – početni položaji i brzine ribe i ptice.

Sa skice se može vidjeti da vrijedi:

$d^2 = \left((v_{riba} + v_{rijeka})\,t_1 + \frac{1}{2}v_{ptica}t_1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_{ptica}t_1\right)^2$ **(2 boda)**

$\frac{d^2}{t_1^2} = (v_{riba} + v_{rijeka})^2 + v_{ptica}\,(v_{riba} + v_{rijeka}) + \frac{1}{4}v_{ptica}^2 + \frac{3}{4}v_{ptica}^2$

$\frac{d^2}{t_1^2} = (v_{riba} + v_{rijeka})^2 + v_{ptica}\,(v_{riba} + v_{rijeka}) + v_{ptica}^2$

Uvrstimo brojeve: $d = 42$ m, $t_1 = 3$ s, $v_{riba} + v_{rijeka} = (17.6 + 4) \cdot \frac{1000}{3600}$ m/s $= 6$ m/s:

$196 = 36 + 6v_{ptica} + v_{ptica}^2$

$v_{ptica}^2 + 6v_{ptica} - 160 = 0$

$(v_{ptica} - 10)\,(v_{ptica} + 16) = 0$ **(2 boda)**

Slijedi da je brzina ptice $v_{ptice} = 10$ m/s. **(1 bod)**

Početni položaj uzdizanja ptice s ribom te smjer njezine brzine prikazani su na slici 2.

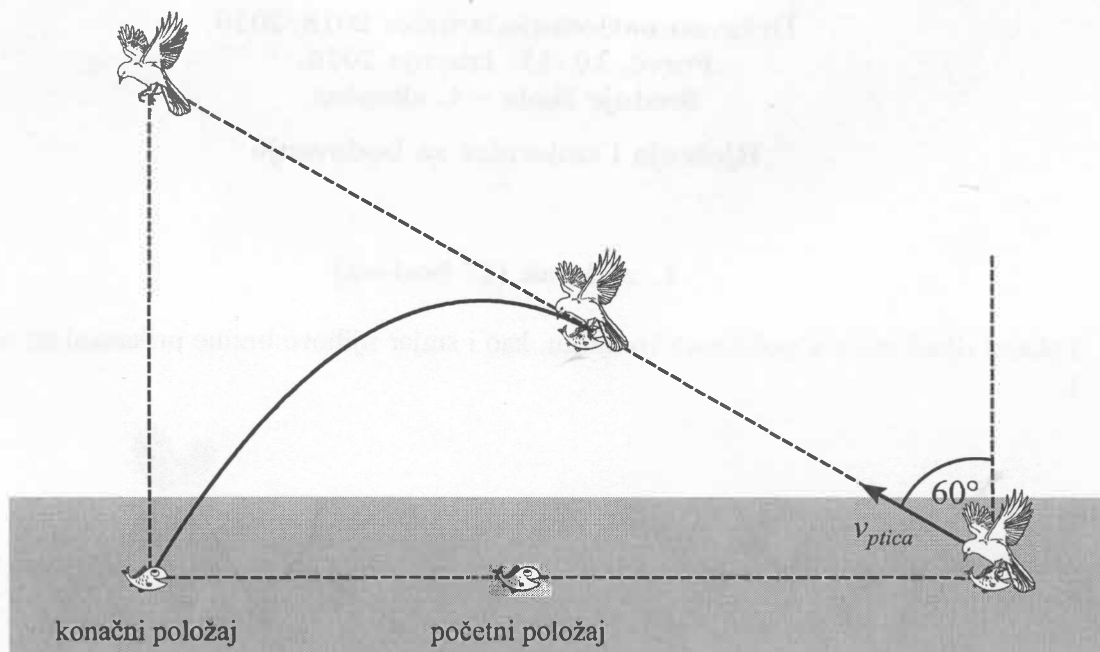
Ptica će se za $t_2 = 2$ s popesti na visinu:

$y_2 = \frac{1}{2}v_{ptica}t_2 = 10$ m **(1 bod)**

U trenutku ispuštanja riba ima početnu brzinu iznosa $v_0 = v_{ptica}$ u smjeru 30° u odnosu na horizontalu. Za gibanje ribe vrijede sljedeće jednadžbe:

$y(t) = y_2 + \frac{1}{2}v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ **(1 bod)**

$x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 t$ **(1 bod)**

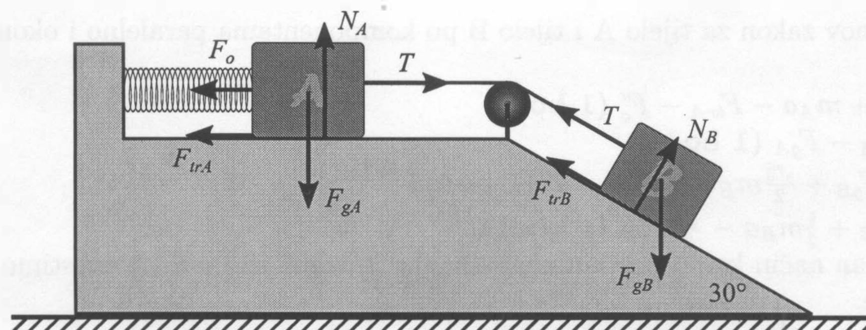


Slika 2: Zadatak 1 – zajedničko gibanje ribe i ptice, putanja ribe i ptice nakon ispuštanja ribe do njezinog pada u rijeku.

Maksimalnu visinu, koju postiže riba, možemo odrediti iz sljedeće relacije gdje smo uzeli u obzir da je vertikalna komponenta brzine u najvišoj točki putanje jednaka nuli:
$\left(\frac{1}{2}v_0\right)^2 = 2gy_3 \Rightarrow y_3 = \frac{v_0^2}{8g} = 1.25$ m **(1 bod)**
$y_{max} = y_2 + y_3 = 11.25$ m **(1 bod)**
U trenutku pada ribe u rijeku vrijedi:
$y(t_4) = 0 = y_2 + \frac{1}{2}v_0 t_4 - \frac{1}{2}gt_4^2$
$0 = 10 + 5t_4 - 5t_4^2$
$t_4^2 - t_4 - 2 = 0$
$(t_4 - 2)(t_4 + 1) = 0$ **(1 bod)**
Prihvatljivo rješenje za vrijeme pada ribe u rijeku je $t_4 = 2$ s nakon što ju je riba ispustila. **(1 bod)**
Udaljenost točke pada ribe u vodu od početne točke jednaka je:
$(v_{riba} + v_{rijeka})\, t_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_{ptica}\,(t_2 + t_4) = 6\ \text{m/s} \cdot 3\ \text{s} - \frac{\sqrt{3}}{2}10\ \text{m/s} \cdot 4\ \text{s} = -16.6$ m, odnosno 16.6 m lijevo od početnog položaja **(2 boda)**. Riba i ptica se u horizontalnom smjeru gibaju jednakom brzinom pa prelaze i jednaku horizontalnu udaljenost. U trenutku pada ribe u rijeku njhova udaljenost jednaka je:
$\frac{1}{2}v_{ptica}\,(t_2 + t_4) = 20$ m. **(1 bod)**
Putanje ribe i ptice prikazane su na slici: **(2 boda)**.

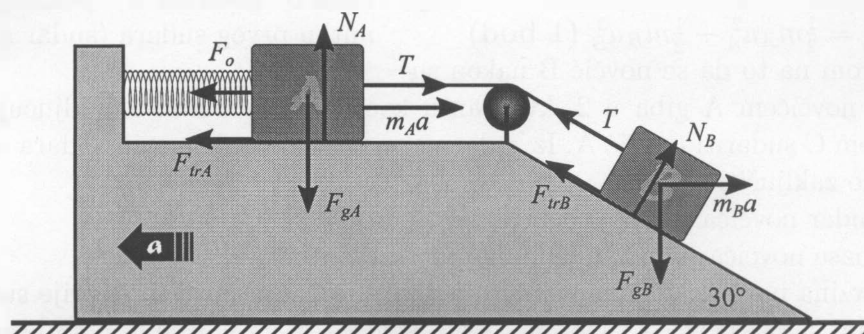
2. zadatak (17 bodova)

Tijelo B gibat će se niz kosinu zbog čega će se tijelo A gibati prema desno. Sile na tijela A i B za vrijeme njihovog gibanja prikazane su na slici 3. Ubrzanje tijela A i B a' se mijenja za vrijeme gibanja jer se mijenja iznos sile opruge. Možemo napisati 2. Newtonov zakon za tijelo A i tijelo B po komponentama paralelno i okomito na podlogu:



Slika 3: Zadatak 2 – sile na tijelo A i B dok platforma miruje na horizontalnoj podlozi.

$m_A a' = T - F_{trA} - F_o$ **(1 bod)**
$0 = N_A - F_{gA}$ **(1 bod)**
$m_B a' = \frac{1}{2} F_{gB} - F_{trB} - T$ **(1 bod)**
$0 = N_B - \frac{\sqrt{3}}{2} F_{gB}$ **(1 bod)**
Sila trenja jednaka je umnošku koeficijenta trenja i sile podloge na tijelo pa slijedi:
$F_{trA} = \mu N_A = \mu F_{gA}$ **(1 bod)**
$F_{trB} = \mu N_B = \mu \frac{\sqrt{3}}{2} F_{gB}$ **(1 bod)**
Uvrštavanjem izraza za sile trenja u prvu i treću jednadžbu i njihovim zbrajanjem dobije se:
$F_o = \left(\frac{1}{2} m_B - \mu \left(m_A + \frac{\sqrt{3}}{2} m_B\right)\right) g - (m_A + m_B)\, a'$
Sila opruge je:
$F_o = k\,(l - l_0) = k\,(1.1 l_0 - l_0) = 0.1 k l_0.$ **(1 bod)**
Uvrštavanjem omjera masa $m_B = 2m_A$, ubrzanja tijela $a' = 0.1g$, izraza za silu opruge i koeficijenta trenja $\mu = 0.2$ dobije se:
$0.2 k l_0 = \left(1 - 0.3\left(1 + \sqrt{3}\right)\right) m_A g$
$k = \left(5 - 2\sqrt{3}\right) \frac{m_A g}{l_0}$ **(1 bod)**
Kada platforma ubrzava, na tijela A i B djeluje inercijalna sila u smjeru suprotnom od ubrzanja platforma. Iz uvjeta zadatka da će se opruga dodatno produljiti zaključujemo da inercijalna sila na tijela A i B djeluje prema desno što znači da je ubrzanje platforme prema lijevo **(1 bod)**. U ovom slučaju sve sile na tijela A i B u sustavu platforme prikazane su na slici 4.



Slika 4: Zadatak 2 – sile na tijelo A i B dok platforma ubrzava prema lijevo. Sile su prikazane u sustavu platforme.

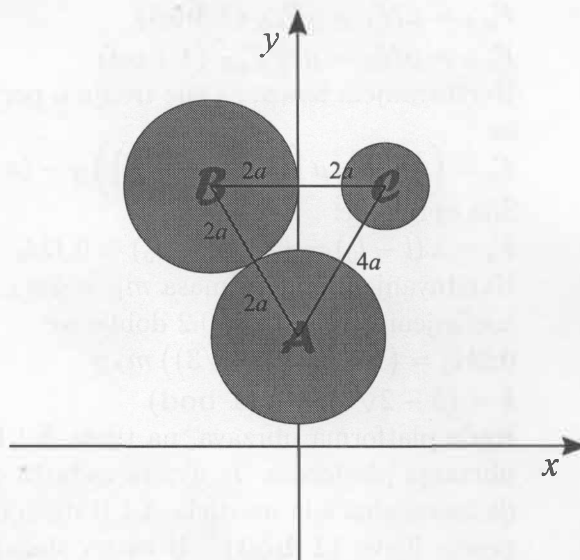
U trenutku u kojem je ubrzanje tijela A i B u odnosu na platformu jednako nuli, 2.

Newtonov zakon za tijelo A i tijelo B po komponentama paralelno i okomito na podlogu glasi:
$0 = T + m_A a - F_{trA} - F'_o$ **(1 bod)**
$0 = N_A - F_{gA}$ **(1 bod)**
$0 = \frac{1}{2}F_{gB} + \frac{\sqrt{3}}{2}m_B a - F_{trB} - T$ **(1 bod)**
$0 = N_B + \frac{1}{2}m_B a - \frac{\sqrt{3}}{2}F_{gB}$ **(1 bod)**
Na sličan način kao u prethodnom slučaju izrazimo sile trenja, uvrstimo i zbrojimo jednadžbe:
$0 = \left(m_A + \frac{\sqrt{3}}{2}m_B + \mu\frac{1}{2}m_B\right)a - F'_o - \left(\mu m_A - \frac{1}{2}m_B + \mu\frac{\sqrt{3}}{2}m_B\right)g$
Sila opruge je u ovom slučaju $F'_o = k\left(l' - l_0\right) = 0.4kl_0$. Uvrštavanjem poznatih vrijednosti dobije se:
$\left(1.2 + \sqrt{3}\right)m_A a = 0.4l_0\left(5 - 2\sqrt{3}\right)\frac{m_A g}{l_0} + \left(0.2\sqrt{3} - 0.8\right)m_A g$

$$a = \frac{1.2 - 0.6\sqrt{3}}{1.2 + \sqrt{3}}g = 0.055g = 0.54 \text{ m/s}^2 \text{ **(4 boda)**}$$

3. zadatak (18 bodova)

Novčić A najprije će se sudariti s novčićem B. Njihovi položaji u trenutku sudara prikazani su na slici 5. Sila novčića A na novčić B djeluje okomito na tangentu u točki njihova dodira te će stoga brzina novčića B nakon sudara u_B imati isti smjer. Iz pravokutnog trokuta prikazanog na slici hipotenuze $4a$ i jedne katete $2a$ zaključujemo da je kut između smjera djelovanja sile i pozitivnog smjera osi y 30° **(1 bod)**. Zakon očuvanja količine gibanja za sudar novčića A i B možemo napisati po komponentama u koordinatnom sustavu:
$0 = m_A u_{Ax} - m_B\frac{1}{2}u_B$ **(1 bod)**
$m_A v_A = m_A u_{Ay} + m_B\frac{\sqrt{3}}{2}u_B$ **(1 bod)**
Zakon očuvanja energije za ovaj sudar glasi:
$\frac{1}{2}m_A v_A^2 = \frac{1}{2}m_A u_A^2 + \frac{1}{2}m_B u_B^2$ **(1 bod)**



Slika 5: Zadatak 3 – položaji novčića u trenutku prvog sudara (sudar novčića A i B).

S obzirom na to da se novčić B nakon sudara s novčićem A giba u 2. kvadrantu koordinatnog sustava zaključujemo da će se s novčićem C sudariti novčić A. Iz zadanog podatka da nakon svih sudara novčić A miruje, možemo zaključiti sljedeće:

- sudar novčića A i C je centralan, **(1 bod)**
- mase novčića A i C su jednake, **(1 bod)**
- brzina novčića C nakon sudara jednaka je brzini novčića A prije sudara. **(1 bod)**

Centralni sudar novčića znači da je sila novčića A na novčić C u smjeru brzine novčića A prije sudara. U suprotnom, slično kao u sudaru novčića A i B, smjer brzine novčića C nakon sudara bila bi u smjeru okomitom na tangentu u točki njihova dodira, odnosno pod određenim kutem u odnosu na brzinu novčića A prije sudara. Prethodno bi zbog zakona očuvanja količine gibanja nužno značilo da bi novčić A nakon sudara imao komponentu brzine okomitu na smjer brzine prije sudara. No, budući da je zadano da novčić A nakon

sudara miruje, zaključujemo da je sudar novčića A i C centralan **(2 boda)**. Dalje možemo analizirati centralni elastični sudar novčića A i C gdje su brzine novčića prije sudara: u_A i $u_C = 0$, a nakon sudara: u'_A i u'_C. Zakoni očuvanja količine gibanja i energije su kako slijedi (gibanje novčića prije i nakon sudara je duž osi paralelne smjeru brzine u_A):

$m_A u_A = m_A u'_A + m_C u'_C$

$\frac{1}{2} m_A u_A^2 = \frac{1}{2} m_A u'^2_A + \frac{1}{2} m_C u'^2_C$

Iz zakona očuvanja količine gibanja izrazimo u_A:

$u_A = u'_A + \frac{m_C}{m_A} u'_C$,

uvrstimo u zakon očuvanja energije i sredimo pa dobijemo jednadžbu:

$u'_C \left(\left(1 - \frac{m_C}{m_A}\right) u'_C - 2u'_A \right) = 0$

Rješenje $u'_C = 0$ i $u'_A = u_A$ odbacujemo jer ne odgovara uvjetima ovog sudara. Iz drugog rješenja za brzine novčića A i C nakon sudara slijedi:

$$u'_A = \frac{m_A - m_C}{m_A + m_C} u_A, \; u'_C = \frac{2m_A}{m_A + m_C} u_A$$

Iz zahtjeva zadatka da je $u'_A = 0$ slijedi $m_A = m_C = 5$ g, a nadalje za brzinu novčića A prije sudara s novčićem C slijedi $u_A = u'_C = 10$ cm/s. **(4 boda)**

Ako je sudar novčića A i C centralan, to znači da se novčić A prije sudara s novčićem C, a nakon sudara s novčićem B gibao duž spojnice središta novčića A i C. Iz slike možemo vidjeti da iz toga slijedi da brzina novčića A nakon sudara s novčićem B zatvara kut od 30° s pozitivnim smjerom osi y, odnosno da je $u_{Ax} = \frac{1}{2} u_A$ i $u_{Ay} = \frac{\sqrt{3}}{2} u_A$ **(1 bod)**. Prethodno uvrstimo u zakon očuvanja količine gibanja za sudar novčića A i B pa dobijemo:

$0 = m_A \frac{1}{2} u_A - m_B \frac{1}{2} u_B$

$m_A v_A = m_A \frac{\sqrt{3}}{2} u_A + m_B \frac{\sqrt{3}}{2} u_B$

Iz prve jednadžbe slijedi $m_A u_A = m_B u_B$. Uvrštavanjem u drugu dobijemo:

$v_A = \sqrt{3} u_A = \sqrt{3} u'_C = 17.3$ cm/s **(1 bod)**

Uvrštavanjem prethodnih izraza u zakon očuvanja energije dobije se omjer masa novčića:

$\frac{m_A}{m_B} = 2$ **(1 bod)**

Pa je prema tome masa novčića B $m_B = \frac{1}{2} m_A = 2.5$ g **(1 bod)**.

Nadalje za brzinu novčića B nakon sudara slijedi:

$u_B = \frac{m_A}{m_B} u_A = 2u_A = 20$ cm/s **(1 bod)**.

4. zadatak (18 bodova)

Venera se giba oko Sunca po kružnoj putanju radi djelovanja gravitacijske sile te stoga 2. Newtonov zakon glasi:

$$m_{Venera} \frac{v^2}{r} = G \frac{m_{Venera} m_{Sunce}}{r^2},$$ **(2 boda)**

gdje je v orbitalna brzina Venere, a r polumjer kružne putanje Venere oko Sunca. Brzina v nadalje je jednaka:

$$v = \frac{2r\pi}{T_{Venera}}.$$ **(1 bod)**

Uvrštavanjem prethodnog u 2. Newtonov zakon dobijemo:

$$\frac{4r\pi^2}{T^2_{Venera}} = G \frac{m_{Sunce}}{r^2} \Rightarrow T_{Venera} = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G m_{Sunce}}} = 224.7 \text{ dana}$$ **(2 boda)**

Uzmimo da se u početnom trenutku $t = 0$ Venera nalazi u položaju donje konjunkcije na kutu 0°. Smjer rotacije Zemlje i Venere oko Sunca prikazan je na slici 6. Uspoređujući sideričke periode Venere i Zemlje zaključujemo da se Venera giba brže od Zemlje. Za vrijeme jednog sideričkog perioda Venere Zemlja će se pomaknuti za kut:

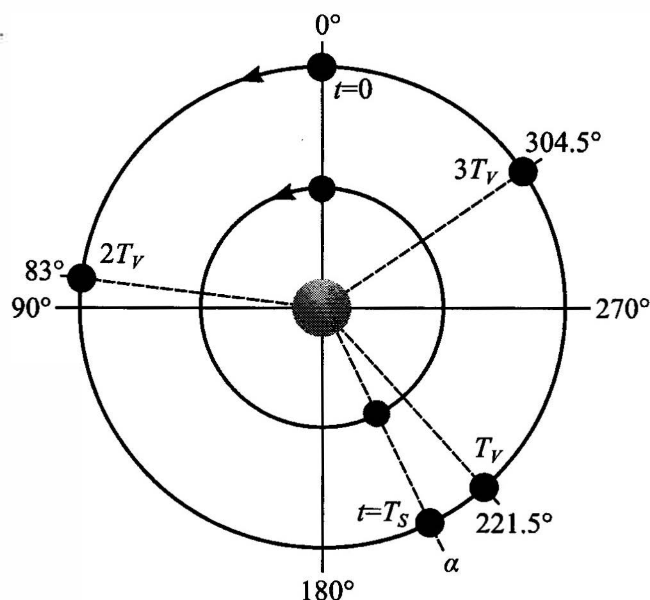
$\Delta\phi = \frac{360^\circ}{T_{Zemlja}} T_{Venera} = 221.5^\circ$ **(1 bod)**

U vremenu sljedećeg sideričkog perioda Venere, odnosno u trenutku $t = 2T_{Venera}$ Zemlja će se dodatno zakrenuti za $\Delta\phi$ te će biti na kutu:

$2 \cdot 221.5^\circ - 360^\circ = 83^\circ$ **(1 bod)**

U trenutku $t = 3T_{Venera}$ Zemlja je na položaju:

$3 \cdot 221.5^\circ - 360^\circ = 304.5^\circ$ **(1 bod)**



Slika 6: Zadatak 4

Sa slike možemo vidjeti da nakon vremena T_{Venera} Zemlja još nije napravila puni krug oko Sunca. U trenutku $2T_{Venera}$ Zemlja je napravila jedan puni krug i nalazi se na 83°. Također možemo vidjeti da Venera između T_{Venera} i $2T_{Venera}$ sustiže Zemlju te da se razlika kuta između Venere i Zemlje smanjila. U trenutku $3T_{Venera}$ vidimo da je Venera prestigla Zemlju što znači da se donja konjunkcija Venere dogodila u trenutku T_S koji je između $2T_{Venera}$ i $3T_{Venera}$. Dakle, Venera će između dva položaja donje konjunkcije napraviti dva puna kruga oko Sunca, a Zemlja jedan **(1 bod)**. Na slici su također prikazani položaji dvije uzastopne donje konjunkcije Venere pri čemu se Zemlja i Venera u drugoj konjunkciji nalaze na kutu α. Vrijedi:

$\alpha = \frac{360^\circ}{T_{Zemlja}} (T_S - T_{Zemlja})$ **(1 bod)**

$\alpha = \frac{360^\circ}{T_{Venera}} (T_S - 2T_{Venera})$ **(1 bod)**

Izjednačimo prethodne dvije jednadžbe:

$$\frac{360^\circ}{T_{Zemlja}} (T_S - T_{Zemlja}) = \frac{360^\circ}{T_{Venera}} (T_S - 2T_{Venera})$$

Sređivanjem za sinodički period Venere T_S dobijemo:

$T_S = \frac{T_{Zemlja}T_{Venera}}{T_{Zemlja} - T_{Venera}} = \frac{1}{\frac{1}{T_{Venera}} - \frac{1}{T_{Zemlja}}} = 583.9$ dana **(2 boda)**

Uvjet za opažanje sljedećeg Venerinog tranzita je da se Venera nalazi u donjoj konjunkciji i to na istom položaju u odnosu na daleke zvijezde kao 8. lipnja 2004. Prethodno smo odredili da se nakon svakog sideričkog perioda Zemlja i Venera zakrenu za kut α. Slijedi da traženi uvjet možemo zapisati kao $n\alpha \approx m360^\circ$, gdje su n i m prirodni brojevi **(2 boda)**. Najprije izračunamo kut α:

$\alpha = \cancel{360^\circ} \frac{2T_{Venera} - T_{Zemlja}}{T_{Zemlja} - T_{Venera}} = 215.5^\circ$ **(1 bod)**

Uvrštavanjem prirodnih brojeva dobivamo da je $5 \cdot 215.5^\circ \approx 3 \cdot 360^\circ$ **(1 bod)** što znači da se sljedeći Venerin tranzit dogodio 5 sideričkih perioda Venere nakon 8. lipnja 2004., odnosno nakon $5 \cdot 583.9$ dana $= 2919.5$ dana ≈ 8 godina **(1 bod)**.